КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА

1. Вершины связного графа нельзя покрасить меньше чем в $n+1$ цветов так, чтобы одноцветные вершины не были бы соединены ребром. Докажите, что можно удалить из графа $n(n-1)/2$ ребер так, чтобы он остался связным.

2. Для произвольных положительных чисел a, b, c докажите, что
$\frac{a^3}{bc(b+c)} + \frac{b^3}{ca(c+a)} + \frac{c^3}{ab(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$.

3. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) вписанная окружность с центром в точке I касается стороны BC в точке D. Пусть M — середина BC. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек M и D на прямые AI и MI соответственно, пересекаются на высоте треугольника ABC, проведенной из вершины A (или на ее продолжении).

4. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n вещественных корней, больших 1. Докажите, что среди них существует корень, не меньший, чем $1 + n\left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$.

5. В кубе расположен выпуклый многогранник, чья проекция на каждую грань куба полностью ее покрывает. Докажите, что объем этого многогранника не меньше трети объема куба.

6. Двое играющих по очереди ломают палку: первый на две части, затем второй ломает любой из кусков на две части, затем первый — любой из кусков на две части, и т.д. Первый игрок выигрывает, если после какого-то из своих ходов сможет сложить из 6 кусков два равных треугольника. Сможет ли второй игрок ему помешать?

7. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

8. Толя хочет получить из данного натурального числа однозначное. Для этого разрешается расставить между цифрами плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается сделать подобную операцию, и так далее. Докажите, что за 10 операций всегда можно получить однозначное число.

9. Команда из n школьников участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из k заранее известных цветов, а затем по свистку все школьники одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких ее участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Какое наибольшее число очков команда, заранее наметив план действий каждого ее члена, может гарантированно получить?

10. Многочлен P таков, что для любого рационального y найдется рациональное x, такое, что $P(x) = y$. Докажите, что степень многочлена P равна 1.

РЕШЕНИЯ

1. Вершины связного графа нельзя покрасить меньше чем в $n+1$ цветов так, чтобы одноцветные вершины не были бы соединены ребром. Докажите, что можно удались из графа $n(n-1)/2$ ребер так, чтобы он остался связным.

Решение. Будем красить вершины по следующему правилу. Возьмем произвольную вершину и покрасим ее в цвет 1. Затем возьмем любую еще не покрашенную вершину, соединенную с одной из покрашенных, и покрасим ее в наименьший допустимый цвет. Т.к. граф связен, все вершины будут покрашены. После каждой покраски очередной вершины v в цвет $k \geqslant 3$ удалим все ребра, соединяющие ее с уже покрашенными вершинами цвета $2, \ldots, k-1$. Докажем, что после такой процедуры граф останется связным.

В самом деле, из любой непокрашенной вершины можно попасть в покрашенную (т.к. мы удалили ребра между уже покрашенными вершинами). Далее, предположим, что покрашенные вершины разбились на две компоненты связности в результате удаления ребра между вершинами v и u (вершина v лежит в первой компоненте, а вершина u — во второй). Заметим, что если вершина v имеет цвет k, то в первой компоненте есть вершины всех цветов от 1 до $k-1$. Если бы вторая компонента содержала бы вершину w цвета 1, то между компонентами существовало бы ребро vw, что невозможно. Получается, что вершина u не может иметь цвет 1 и все цвета от 2 до $k-1$ (тогда она была бы связана с вершиной цвета 1 из первой компоненты, т.к. во второй компоненте нет вершин цвета 1). Значит, вершина u имеет цвет $k+1$, что невозможно,т.к. вершина v — последняя из покрашенных.

Итак, последовательно обходя граф, раскрашивая вершины и удаляя ребра согласно описанному выше алгоритму, мы получим связный граф. По условию при раскраске графа будет задействовано минимум $n+1$ цветов. Поэтому, окрашивая вершины в цвета $3, 4, \ldots, n+1$ и удаляя из них ребра указанным выше способом, мы удалим не менее $1+2+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2$ ребер, поскольку из вершины цвета k ведет минимум $k-2$ ребер в вершины цветов $2, 3, \ldots, k-1$. (Удаляемые ребра различны, т.к. на каждом шаге мы удаляем лишь ребра, ведущие в вершины с меньшим цветом.)

2. Для произвольных положительных чисел a, b, c докажите, что
$\frac{a^3}{bc(b+c)} + \frac{b^3}{ca(c+a)} + \frac{c^3}{ab(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$.

Решение. По транснеравенству имеем $xy(x+y) \leqslant x^3+y^3$, откуда

$$\frac{a^3}{bc(b+c)} + \frac{b^3}{ca(c+a)} + \frac{c^3}{ab(a+b)} \geqslant \frac{a^3}{b^3+c^3} + \frac{b^3}{c^3+a^3} + \frac{c^3}{a^3+b^3} \geqslant \frac{3}{2}$$

по неравенству Несбитта.

3. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) вписанная окружность с центром в точке I касается стороны BC в точке D. Пусть M — середина BC. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек M и D на прямые AI и MI соответственно, пересекаются на высоте треугольника ABC, проведенной из вершины A (или на ее продолжении).

Решение.

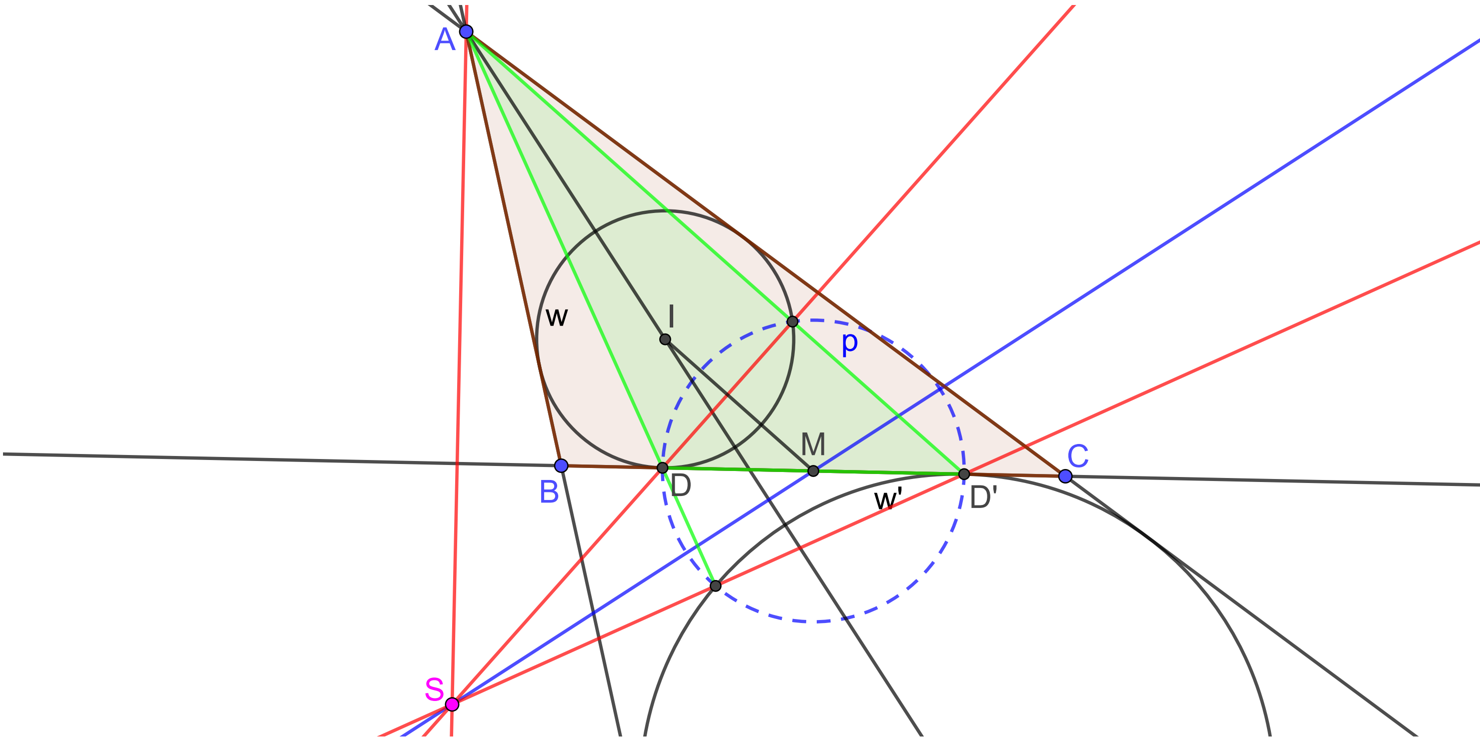

Рис. 1:

Рассмотрим вневписанную окружность ω' треугольника ABC, касающуюся стороны BC в точке D'. Пусть S — точка пересечения высот треугольника ADD'. Тогда высота DS перпендикулярна IM, т.к. прямые IM и AD' параллельны (например, в силу гомотетии с центром в точке A, которая переводит вневписанную окружность ω' во вписанную ω). Докажем, что перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую AI, проходит через S.

Заметим, что основания высот треугольника ADD', лежащие на сторонах AD и AD', а также вершины D и D' лежат на одной окружности p с центром в точке M (поскольку $MD = MD'$ по отрезкам касательных). Поэтому точка S является радикальным центром окружностей ω, ω' и p. Значит, точка S лежит на радикальной оси окружностей ω. Но точка M также лежит на этой оси (т.к. $MD = MD'$ — равные отрезки касательных), а также $SM \perp AI$ (радикальная ось перпендикулярна линии центров). Поэтому перпендикуляр из M на AI проходит через S, что и требовалось доказать.

4. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n вещественных корней, больших 1. Докажите, что среди них существует корень, не меньший, чем $1+n\left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$.

Решение. Пусть $1<x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$ — корни многочлена P, расположенные в порядке возрастания. Тогда $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ и

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}.$$

Учитывая, что $x_i>1$, получаем

$$\left|\frac{P'(1)}{P(1)}\right|=\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\ldots+\frac{1}{x_n-1}\geqslant\frac{n}{x_n-1},$$

откуда следует требуемое неравенство $x_n\geqslant 1+n\left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$.

5. В кубе расположен выпуклый многогранник, чья проекция на каждую грань куба полностью ее покрывает. Докажите, что объем этого многогранника не меньше трети объема куба.

Решение. Заметим, что на каждом ребре куба (включая вершины) должна находиться хотя бы одна вершина этого многогранника (в противном случае проекция многогранника вдоль этого ребра не покроет соответствующую грань). Возьмем вершину многогранника и будем линейно двигать ее по ребру. Заметим, что объем самого многогранника будет изменяться линейно. Чтобы это доказать, рассмотрим триангуляцию, проведя из вершины, которую мы двигаем, ребра в оставшиеся вершины многогранника. Тем-самым мы разобьем многогранник на пирамиды. При движении вершины каждой такой пирамида ее основание не меняется, а высота меняется линейно. Значит, объем каждой пирамиды меняется линейно, поэтому сумма этих объемов, равная объему исходного многогранника, меняется линейно.

Итак, будем двигать каждую из вершин, находящихся на ребре куба, таким образом, чтобы линейное изменение объема многогранника уменьшало бы объем (такое направление, очевидно, всегда существует). Тогда каждая вершина многогранника, находящаяся на ребре, окажется в одной из вершин куба.

Теперь покрасим вершины в шахматном порядке. Если многогранник содержит все вершины какого-то одного цвета, то он сдержит правильный тетраэдр с вершинами этого цвета (т.к. многогранник выпуклый), а потому его объем не меньше объема тетраэдра, равного $1/3$. Если же есть две вершины разных цветов, которые обе не лежат в нашем многограннике, то они должны быть диаметрально противоположными (т.к. на каждом ребре должна быть вершина многогранника). Значит, все остальные вершины должны лежать в нашем многограннике, и его объем не меньше объема получившегося многогранника, составленного из двух четырехугольных пирамид с общим основанием. Ее объем равен $2/3>1/3$. Таким образом, в обоих случаях объем нашего многогранника больше $1/3$, что и требовалось доказать.

6. Двое играющих по очереди ломают палку: первый на две части, затем второй ломает любой из кусков на две части, затем первый — любой из кусков на две части, и т.д. Первый игрок выигрывает, если после какого-то из своих ходов сможет сложить из 6 кусков два равных треугольника. Сможет ли второй игрок ему помешать?

Решение. Докажем, что первый игрок всегда выигрывает. Пусть первый игрок ломает палку пополам, а затем повторяет симметрично ходы второго, пока не образуется 5 пар равных кусков $a = a > b = b > c = c > d = d > e = e$. Если ни из какой тройки разных кусков нельзя сложить треугольник, то первый отламывает от a кусок длины c. Второй обязан разломить один из кусков длины c (иначе первый при своем ходе отломит кусок длины c от одной из палок длины b и сможет сложить два равнобедренных треугольника либо со сторонами c, c, d, либо со сторонами c, c, e). Затем первый игрок отламывает кусок длины c от другого куска длины a и, аналогично, второй игрок обязан разломить вторую палку длины c. В результате получится два куска длин $a - c$, c, d, и e, а также еще четыре куска (которые получаются в результате ходов второго игрока, когда он ломает пакли длины c). Затем первый игрок будет повторять этот процесс, отламывая по c от $a-c$, $a-2c$, $\ldots$, до тех пор, пока не станет возможным при некотором k сложить треугольник из $a - kc$, b и c. Очевидно, что такой момент всегда наступит, поэтому первый игрок победит.

7. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

Решение. Ответ: $p+1$.

Если $(p^2)!$ кратно $(p!)^n$, $n \in \mathbb{N}$, то $n \leqslant p+1$, так как p входит в разложение числа $p!$ на простые множители в степени 1 (а значит, в разложение числа $(p!)^n$ — в степени n), а в разложение числа $(p^2)!$ — в степени $p+1$. Докажем, что $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

Первый способ. Запишем p^2 различных элементов в виде таблицы $p \times p$. Две такие таблицы назовчм эквивалентными, если одна получается из другой некоторыми перестановками элементов внутри строк, а также некоторой перестановкой самих строк (всего $p+1$ перестановка p объектов). Так как m объектов можно переставить $m!$ способами, то всего таблиц $(p^2)!$, и они разбиваются на классы эквивалентных по $(p!)^{p+1}$ таблиц в каждом классе, поэтому $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

Второй способ. Заметим, что

$$\frac{(p^2)!}{(p!)^p} = C_p^p \cdot C_{2p}^2 \cdot C_{3p}^p \cdot \ldots \cdot C_{p^2}^p.$$

Имеем: $C_{kp}^p = kC_{kp-1}^{p-1}$ делится на k при всех $k = 1, 2, \ldots, p$. Поэтому произведение чисел вида C_{kp}^p делится на $p!$.

8. Толя хочет получить из данного натурального числа однозначное. Для этого разрешается расставить между цифрами плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345+6+789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается сделать подобную операцию, и так далее. Докажите, что за 10 операций всегда можно получить однозначное число.

Решение. Докажем, что можно получить однозначное число за 4 операции. Главная сложность в выборе первого действия. Мы хотим добиться, чтобы после первой операции получилось число, имеющее не более трех ненулевых цифр.

Пусть нам дано натуральное число N, и пусть A — сумма его цифр, стоящих на нечетных местах (первой, третьей и т. д.), а B — сумма его цифр, стоящих на четных местах. В записи числа N расставим плюсы между всеми цифрами, получим число $A+B$. Заметим, что, если убрать плюс между двумя цифрами a и b, то сумма увеличится на $9a$. Предположим, что $A \geqslant B$ (случай $A < B$ разбирается полностью аналогично). Теперь станем последовательно убирать плюсы после цифр, стоящих на нечетных местах. Если стереть все плюсы, то получится число не меньшее чем $10A + B - 81$ (возможно, после последней цифры числа плюса нет и убрать его нельзя, поэтому увеличивать последнюю цифру в 10 раз не нужно).

Докажем, что в какой-то момент при последовательном стирании плюсов сумма будет состоять из не более чем трех ненулевых цифр. Для этого рассмотрим старший разряд этой суммы и покажем, что либо найдется момент при последовательном стирании, когда он увеличится, либо сумма не больше 1000. Действительно, пусть $c \cdot 10^n \leqslant A + B < (c+1) \cdot 10^n$ (c — старший разряд числа $A + B$, а n — количество цифр в нем). Если старший разряд суммы не изменится, то

$$c \cdot 10^n \leqslant 10A + B - 81 < (c+1) \cdot 10^n.$$

Домножим первое неравенство на -1 и прибавим ко второму. Получим $-10^n < 9A - 81 < 10^n$. Но поскольку $A \geqslant B$, из первого неравенства получаем $A \geqslant \frac{c}{2} \cdot 10^n$, откуда $\frac{9c}{2} \cdot 10^n - 81 < 10^n$. Это означает, что $\frac{9c-2}{2} \cdot 10^n < 81$, что возможно только при $n = 0$, 1 или 2, то есть при $A + B < 1000$. Значит, в этом случае число $A + B$ состоит из не более чем трех цифр.

В противном случае можно последовательным стиранием плюсов перед цифрами, стоящими на местах некоторой четности, увеличить старший разряд суммы. Будем последовательно стирать плюсы этим образом и остановимся ровно в тот момент, когда произойдцт увеличение старшего разряда. При этом каждый раз мы добавляем не более 81, так что в момент остановки мы получим сумму вида $\overline{*000\ldots000**}$, если не произойдет перенос в старшем разряде, или $\overline{10000\ldots000**}$ иначе.

Таким образом произведена первая операция. Далее станем просто складывать все цифры. После второй операции мы получим не более 27, после третьей не более 10, после четвертой получается однозначное число.

9. Команда из n школьников участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из k заранее известных цветов, а затем по свистку все школьники одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких ее участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Какое наибольшее число очков команда, заранее наметив план действий каждого ее члена, может гарантированно получить?

Решение. Отметим, что действия каждого игрока при любом плане действий однозначно определяются цветом шапок у остальных участников команды (так как другой информации у него нет). Докажем, что при произвольных n и k нельзя гарантировать больше чем $[n/k]$ совпадений.

Пусть цвета шапок у всех игроков, кроме первого, фиксированы, а у первого игрока возможен любой из k цветов. Так как действия первого игрока однозначно определяются цветом шапок у остальных участников команды, то среди этих k случаев ровно в одном цвета шарфа и шапки у первого игрока совпадут. Поскольку на $n-1$ игроков шапки k цветов можно надеть k^{n-1} способами, то среди всех k^n способов надевания шапок на n игроков ровно в k^{n-1} случаях цвета шарфа и шапки у первого игрока совпадут. То же верно для любого игрока. Поэтому для любого фиксированного плана действий среди всех k^n способов надевания шапок будет всего nk^{n-1} совпадений цвета шарфа и шапки у каких-нибудь игроков. Значит, среднее число совпадений на один способ надевания шапок будет равно $nk^{n-1}/k^n = n/k$ и, следовательно, минимальное число совпадений не превосходит n/k. То есть найдцтся хотя бы один способ надевания

Опишем план действий игроков, при котором они всегда могут гарантировать $[n/k]$ совпадений. Сопоставим цветам числа 0, 1, 2, ..., $k-1$. Пусть игроки составят $[n/k]$ групп по k игроков (оставшиеся игроки пусть действуют произвольно). В каждой группе пусть игроки получат разные номера 0, 1, 2, ..., $k-1$. Во время игры пусть игрок с номером i выбирает цвет шарфа так, чтобы сумма всех чисел, соответствующих цвету его шарфа и цветам шапок остальных игроков его группы, давала при делении на k остаток i. Таким образом, если сумма чисел, сопоставленных цветам шапок остальных игроков его группы, равна a, то он должен выбрать число x из множества 0, 1, 2, ..., $k-1$ так, чтобы число $a+x-i$ делилось на k. При любых a и i такое x определяется однозначно, то есть план действий корректен. При этом в любом случае ровно 1 игрок в группе угадает цвет своей шапки. А именно, если сумма чисел, сопоставленных цветам всех шапок, надетых игрокам данной группы, дает при делении на k остаток j, то цвет шарфа и шапки совпадчт у игрока с номером j в данной группе. Следовательно, в любом случае цвет шарфа и шапки совпадет как минимум у $[n/k]$ игроков.

10. Многочлен P таков, что для любого рационального y найдется рациональное x, такое, что $P(x) = y$. Докажите, что степени многочлена P равна 1.

Решение. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, легко показать, что многочлен P имеет рациональные коэффициенты. Поэтому существует такое натуральное $m \in \mathbb{N}$, что коэффициенты многочлена $Q(x) = mP(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ являются целыми взаимно простыми числами. Пусть теперь p — произвольное простое число, не делящее a_n. Докажем, что уравнение $Q(x) = \frac{1}{p}$ не имеет рациональных решений (тогда отсюда следует, что уравнение $P(x) = \frac{1}{mp}$ не имеет рациональных решений).

Предположим противное: пусть уравнение $Q(x) = \frac{1}{p}$ имеет рациональное решение k/l. Тогда

$$a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1}l + \ldots + a_0 l^n = \frac{l^n}{p}.$$

Т.к. левая часть целая, то и правая целая, поэтому $l \vdots p$. Пусть $n > 1$, тогда $l^n/p \vdots p$, а потому $a_n k^n \vdots p$. Но k и l взаимно просты, поэтому $a_n \vdots p$ — противоречие.