Рекомендации по решению задачи с параметром части С ЕГЭ

П. В. Бибиков

Общие замечания

Задача с параметром (С6) является ключевой во всем варианте ЕГЭ по математике. Статистика показывает, что класс, который решил эту задачу лучше, и в целом показывает более высокий результат. Более того, это верно даже в отношении конкретных учеников: школьники, решающие С6, как правило, набирают более высокий балл, чем те, кто С6 не решил.

Почему так происходит? Дело в том, что задача С6 — это *единственная* задача во всем варианте ЕГЭ, которая не содержит в себе разбиения на логические случаи, которые оцениваются независимо друг от друга. Например, есть три пункта в задаче С7, два неравенства в задаче С3, и т.д., причем каждый пункт хоть как-то да оценивается, что и прописано в критериях проверки.

А вот в С6, как правило, согласно критериям проверки, оценивается, *насколько полученный ответ близок к правильному.* А именно,

- ответ полностью верен — 4 балла;
- ответ отличается от правильного конечным числом точек — 3 балла;
- верно найдены все (или, например, два из трех) граничные значения параметра — 2 балла;
- верно найдено одно граничное значение параметра — 1 балл;

Из-за подобных критериев школьники, как правило, получают за задачу С6 либо 4 или 3 балла (если верно сообразили *идею решения* и верно *довели ее до ответа*), либо 0 или 1 балл (либо *не сообразили, как решать*, либо сообразили, но *ошиблись в вычислениях*). Именно этот разрыв и определяет общий успех (или неуспех) всего класса.

По статистике разумно выделить следующие критерии «успешности» результатов класса относительно решения задачи С6:

средний балл b	$b \geqslant 2{,}3$	$2 \leqslant b < 2{,}3$	$1{,}8 \leqslant b < 2$	$b < 1{,}8$
оценка	«5»	«4»	«3»	«2»

План подготовки

План подготовки к задаче С6, предложенный в данном пособии, включает в себя *3 этапа*.

1. **База.** На этом этапе школьник должен в совершенстве овладеть тремя основными методами решения задач с параметром. К их числу следует отнести следующие методы (по убыванию степени важности и частоте использования):
   - графический метод
   - метод четности / симметричности, метод мажорант
   - свойства функций
2. **БКЗ.** Здесь школьник должен научиться понимать, какой именно метод необходимо применять в той или иной задаче. В частности, он должен уметь понять, что базовые методы не работают, и нужно придумывать что-то еще.
3. **Нестандартные ситуации.** Это заключительный этап подготовки, на котором школьник должен освоить некоторые нестандартные методы решения задач с параметром. Среди них можно выделить следующие:
   - алгебраический метод
   - логический метод («при каких a для любого $b\dots$»).

Соображение нематематического характера

В этот раздел мы собрали некоторые наблюдения, которые нельзя формализовать и считать строгими правилами, работающими в любых ситуациях. Однако опыт показывает, что почему-то эти соображения оказываются невероятно полезными при решении практических задач с ЕГЭ (а также с ДВИ и олимпиад). Перечислим те, с которыми приходилось сталкиваться непосредственно.

- Нужно помнить, что задача С6 — это *трудная задача* (по мнению составителей ЕГЭ). А раз так, то она составляется не для того, чтобы школьник продемонстрировал умение решить стандартные тригонометрические уравнения или неравенства с радикалами и логарифмами — для этого есть задачи С1 и С3. Задача С6 — более глубокая, не стоит пытаться решить ее *в лоб*, банальными алгебраическими методами.

- Зачастую в самом условии скрыта подсказка к тому, как следует решать задачу. Поэтому *не бросайтесь* преобразовывать выражения, возводить в квадрат, переносить все в одну часть и т.д. — задача С6 предлагается *не для этого.*

- До 2015 года на основных ЕГЭ и на подавляющем большинстве пробников предлагались задачи, которые решаются *графическим методом.* На основном ЕГЭ 2014 года была предложена задача, которая решалась *алгебраически.* Возможно, это связано с тем, что за применение графического метода эксперты очень часто *необоснованно* снижали баллы. Поэтому имеет смысл предположить, что и в дальнейшем на ЕГЭ будут предлагаться задачи, решаемые алгебраическими методами. Стоит внимательно следить за пробниками, чтобы попытаться угадать задачу с основного ЕГЭ.

- Если в условии задачи есть сложные «несочетаемые» выражения (логарифмы, синусы, степени. . .) от *одной* переменной, скорее всего, задача решается с помощью свойств функций (метод 3). Если переменных несколько, то, скорее всего, работает метод мажорант (метод 2).

- Если никакие идейные методы не работают, ничего не остается кроме как решать задачу алгебраически.

1. База: основные методы

В этом разделе мы рассмотрим основные методы решения задач с параметрами, а также предложим способы отработки этих методов. Напомним, что методы представлены в порядке убывания степени их важности и частоты использования.

1.1. Графический метод

Суть графического метода заключается в том, чтобы изобразить на координатной плоскости множество решений данного уравнения (или системы уравнений, или неравенств...), понять, какое их расположение отвечает условию задачи и с помощью геометрических соображений (расстояние между точками, касание прямой и окружности, параллельность прямых и т.д.) найти искомые значения параметра.

Довольно часто бывает полезен следующий прием: перенести все, что зависит от параметра, в правую часть, а все, что не зависит — в левую. Тогда график левой части фиксирован, а график правой части двигается при изменении параметра. Нужно понять, какое его положение удовлетворяет условию задачи, и в зависимости от этого найти соответствующие значения параметра.

Если этого сделать нельзя, и от параметра зависят сразу два графика, то, как правило, довольно тяжело понять, как именно они двигаются вместе. Однако зачастую это и не нужно: необходимо рисовать графики *в статике* (т.е. неподвижными), таким образом, чтобы эти статичные положения были бы граничными для нужных и ненужных значений параметра.

Все это школьнику стоит объяснить перед тем, как предлагать задачи. В случае задач ЕГЭ особенно важно, чтобы он решал их *именно так, как того требует учитель*, а не так, как пришло в голову ему.

Что мы умеем рисовать

Для успешного использования этого метода важно быстро видеть те уравнения, которые мы умеем рисовать на координатной плоскости. К их числу относятся следующие:

- прямые,
- полуокружности,
- окружности,
- параболы (сюда относится и геометрия квадратного трехчлена),
- гиперболы,
- комбинации с модулями (например, уголок $|x|$).

Кроме того, необходимо уметь пользоваться различными системами координат. Особенно важно (помимо стандартной Oxy) помнить следующие две:

- в качестве одной из координат выступает параметр («метод областей»); он работает, когда параметр легко (часто линейно) выражается через x,
- тригонометрическая система координат (координаты cos и sin); она часто полезна в задачах, в которые cos и sin входят *линейно*.

Регаты

Прежде всего необходимо научиться быстро рисовать соответствующие семейства кривых. Для тренировки мы используем *математические регаты*.

Суть регаты заключается в том, чтобы предложить школьнику *много простых задач* на *малое количество времени*. Например, на первые задачи разумно отводить 2–3 минуты времени, далее 4–5 минут и 6–7 (т.е. вся регата может уместиться в один урок). Школьник должен научиться не просто решать задачи, он должен научиться решать их *быстро* и безошибочно. Кроме того, попытка решения, как правило, только одна (на вторую просто не хватит времени). Поэтому школьники, решающие задачи *нерациональными способами*, как правило, с регатой не справляются.

1. (2 балла) Изобразите на координатной плоскости Oxy семейство графиков

$$2ax + y + 1 = 0.$$

2. (2 балла) Изобразите на координатной плоскости Oxy семейство графиков

$$2ax + ay + 1 = 0.$$

3. (2 балла) Изобразите на координатной плоскости Oxy семейство графиков

$$2ax + y + a = 0.$$

4. (3 балла) Изобразите на координатной плоскости Oxy семейство кривых

$$|x| + 2|y| = a.$$

5. (3 балла) Изобразите на координатной плоскости Oxy семейство кривых

$$|x + y + 1| + 2|x - y| = a.$$

6. (4 балла) Изобразите на координатной плоскости Oxy семейство графиков

$$y = 3a - |2a - x| + 1.$$

7. (4 балла) Изобразите на координатной плоскости Oxy семейство кривых

$$(x + a + 1)^2 + (y - 2a)^2 = 1.$$

8. (5 баллов) Изобразите на координатной плоскости Oxy семейство графиков

$$y = a - \sqrt{4ax - x^2}.$$

Скорее всего, результаты после первой регаты будут невысокими. Это нормально, однако разумно повторить регату примерно через месяц, чтобы школьники увидели свой прогресс (который, несомненно, будет).

Например, можно предоставить такой вариант (сюда уже можно включить настоящие задачи с параметром, а не только рисование семейств кривых).

9. (4 балла) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^2 - 5x + 6| = ax$$

имеет ровно три решения?

10. (4 балла) При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 2x + 1$$

имеет единственное решение?

11. (5 баллов) При каких условиях, наложенных на параметры p и q, система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 \\ \quad y - q = |x| \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

12. (5 баллов) При каких a система

$$\begin{cases} y + a = |x| + 4 \\ x^2 + (y - 2a + 5)^2 = 9 \end{cases}$$

имеет ровно 2 корня?

Задачи

В этом разделе предлагается подборка задач с параметрами, решаемых графическим методом. Несмотря на то, что многие из этих задач могут быть решены по-другому (например, алгебраически), стоит требовать от школьников решать их *только графическим методом*:

они должны научиться применять его даже там, где это, на первый взгляд, невозможно.

13. Для каждого значения параметра a найти количество решений уравнения
$$x|x+1|+a=0.$$

14. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ |y|-x=a \end{cases}$$
имеет ровно два решения?

15. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$|2x-a|+1=|x+3|$$
имеет единственное решение.

16. При каких значениях параметра a корни уравнения
$$|x-a^2|=-a^2+2a+3$$
имеют одинаковые знаки?

17. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} y=\sqrt{12+4x-x^2}+2 \\ y=\sqrt{16-a^2+2ax-x^2}+a \end{cases}$$
имеет единственное решение?

18. При каких значениях параметра a уравнение
$$(a+4x-x^2-1)\cdot(a+1-|x-2|)=0$$
имеет ровно два корня?

19. Найти все значения параметра a, для каждого из которых система
$$\begin{cases} 2ax+y=1 \\ \ \ x+2y>a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $x < 0$, $y < 0$.

20. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x - a = 2|2|x| - a^2|$$

имеет три различных корня, и найти эти корни.

21. При каких значениях параметра a минимум функции

$$f(x) = ax + |x^2 - 4x + 3|$$

больше 1?

22. При каких значениях параметра a существует такой $x \in (1, 2)$, что неравенство

$$a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leqslant 3x - x^2$$

не выполнено?

23. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$$

имеет единственное решение?

24. При каких значениях параметра a существует единственный x, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} x^2 + (4a + 5)x + 3a^2 + 5a < 0 \\ \hfill x^2 + a^2 = 25. \end{cases}$$

Задачи на квадратный трехчлен

Опыт показывает, что особенно плохо школьники справляются с задачами, связанные с квадратным трехчленом, несмотря на то, что *практически все* такие задачи решаются графическим методом (т.е. первична в них картинка). Поэтому имеет смысл рассмотреть такие задачи отдельно.

Прежде всего, как обычно, необходимо нарисовать *все* (как правило, их несколько) положения параболы, удовлетворяющие условию задачи. После этого необходимо эти рисунки формализовать. Кажется, что в этом и заключается самая большая проблема.

На самом деле никакой проблемы нет. Нужно просто запомнить, что существуют ровно *четыре* величины, описывающие нужные нам положения парабол. А именно, это

- знак коэффициента при старшем члена
- дискриминант
- вершина параболы по оси Ox
- значения в некоторых точках.

Выписывать эти величины нужно *именно* в таком порядке. При этом иногда оказывается, что часть из них лишняя (тогда некоторые можно просто вычеркнуть).

25. При каких a оба корня уравнения

$$x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$$

больше 3?

26. При каких a оба корня уравнения

$$x^2 - ax + 2 = 0$$

лежат на интервале $(0, 3)$?

27. При каких a один корень уравнения

$$ax^2 + x + 1 = 0$$

меньше 2, а другой корень больше 2?

28. При каких a неравенство

$$ax^2 + (a+1)x - 3 < 0$$

выполняется при всех $x < 2$?

29. При каких a неравенство

$$(a-1)x^2 + (2a-3)x + (a-3) > 0$$

выполнено хотя бы при одном $x < 1$?

30. При каких значения параметра a уравнение

$$4(\cos x - 3 - a)\cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$$

имеет решение?

31. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет решения на полуинтервале $[-1, 1)$?

32. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a - 6, a]$.

33. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трех корней.

34. Найти все значения параметра a, при которых сумма длин интервалов, составляющих решения неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 2)x - a^2 + 4a - 6}{x^2 + (a^2 + 5a - 5)x - a^2 + 4a - 6} < 0$$

меньше 1.

Метод мажорант

Метод мажорант является ключевой составляющей с разу в двух методах решения задач с параметрами, поэтому мы выделили его в отдельный раздел. Здесь не будет параметров, а будут некоторые «нестандартные» уравнения и неравенства, которые классическими методами решить невозможно. С другой стороны, метод мажорант часто используется в методе четности / симметричности, а иногда и сам по себе позволяет решить задачу с параметром, так что познакомиться с ним стоит заранее.

Суть метода мажорант в следующем. Предположим, что нам нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$, где f и g — некоторые функции. Если удается доказать, что для всех допустимых x имеют место неравенства

$$f(x) \geqslant M \quad \text{и} \quad g(x) \leqslant M$$

при некоторой константе M (называемой *мажорантой*), то исходное уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M, \end{cases}$$

которая, как правило, легко решается.

Аналогичные рассуждения можно проводить для неравенств, для нескольких переменных, систем уравнений и т.д.

Для того, чтобы успешно применять метод мажорант, необходимо помнить основные неравенства из школьной программы. Особое значение имеют неравенства с модулями. В скобках указано, когда достигается равенство.

- $|x| \geqslant x$ $(x \geqslant 0)$, $|x| \geqslant -x \Rightarrow |x| + x \geqslant 0$ $(x \leqslant 0)$;
- $|x| + |y| \geqslant |x + y|$ $(xy \geqslant 0)$;
- $|x - y| \leqslant ||x| - |y||$ $(xy \geqslant 0)$;
- $\dfrac{x+y}{2} \geqslant 2\sqrt{xy}$ при x, $y \geqslant 0$ $(x = y)$.

Научиться видеть ситуации, в которых *работает* метод мажорант, довольно легко. Как правило, типичное указание на него — совмещение в одной задаче «совершенно разных» функций, например, синуса и логарифма. С другой стороны, научиться *применять* метод мажорант не так просто. Часто начинать нужно *с самых очевидных неравенств* типа $x^2 \geqslant 0$, $|\sin x| \leqslant 1$ и т.д., а потом последовательно «навешивать» все новые и новые неравенства как следствия из них. Также бывает полезен принцип «*сравнивать подобное с подобным*». Так или иначе, здесь прежде всего необходимо набраться опыта. Для этого ниже предлагается подборка задач на этот метод.

35. $\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}\geqslant 1$

36. $2^{|x|}=\sin x^2$

37. $2\cos\frac{x}{2}-x^2=2$

38. $5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0$

39. $(x^2-2x+3)(y^2+6y+12)=6$

40. $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0$

41. $-|y|+x-\sqrt{x^2+y^2-1}\geqslant 1$

42.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$$

43.

$$\begin{cases} x^2+4y^2+5=4z \\ x-y\geqslant z \end{cases}$$

44.

$$\begin{cases} z^2+7\leqslant 14xy \\ z-2x-2y=1 \end{cases}$$

1.2. Четность, симметричность

Метода четности / симметричности, как правило, применяется в задачах, где требуется найти параметр, при котором решение *единственно*. Суть этого метода состоит в следующем. *Предположим*, что мы нашли такое значение параметра, при котором решение данного уравнения или системы действительно ровно одно. Часто можно заметить, что данное уравнение или система обладает *симметрией*: при некотором изменении аргументов само уравнение или система неизменны. Чаще всего встречаются следующие две:

- **(четность):** если x_0 — решение, то $-x_0$ — тоже решение;
- **(симметричность):** если (x_0,y_0) — решение, то (y_0,x_0) – тоже решение.

Если мы *предполагаем*, что решение единственно, то с учетом найденных симметрий оно может быть только очень специальным. Например, если x_0 и $-x_0$ — решения, то для единственности *необходимо*, чтобы $x_0=-x_0$, т.е. чтобы $x_0=0$.

Подставляя найденные ограничения на решения в исходное уравнение или систему, удается найти параметры, при которых эти решения существуют.

С этой частью метода четности / симметричности, как правило, проблем не возникает. Проблемы возникают при попытке осознать, что все сделанное ранее — только *первая часть* метода. А есть и *вторая*. И заключается она в необходимости *проверить* найденные значения параметра.

Зачем это нужно? Ведь в графическом методе никакой проверки не требовалось. Дело в том, что мы *предположили*, что искомые значения параметра существуют, и из этого *предположения* вывели *возможные* значения этих параметров. Иначе говоря, мы доказали: *если* искомые параметры существуют, то они *могут быть* только такими (обратите внимание на курсив в первом абзаце). Но далеко не факт, что *все* найденные значения параметра *действительно* удовлетворяют условию! Вот поэтому вторым (и основным!) этапом метода четности / симметричности является *проверка*.

Как правило, только за первый этап решения ставится 1 или 2 балла. За часть проверки или проверку, выполненную с недочетами, ставится 2 или 3 балла. Поэтому важно *попытаться* провести проверку, даже если не получается строго довести ее до ответа.

Как же выполнить эту самую проверку? Ясно, что сначала нужно подставить найденные значения параметра в исходное уравнение или систему, а затем ее решить и убедиться, что решение действительно одно.

Как правило, в процессе решения возникают *два* возможных значения параметра, из которых подходит только *одно*. Для того, чтобы доказать, что второе значение *не подходит*, достаточно просто угадать два решения. Обычно проще начать именно с того, чтобы найти *ненужное* значение параметра.

Как же доказать, что оставшееся значение параметра подходит? Здесь есть три способа:

- сложить и выделить полный квадрат;
- метод мажорант;
- решить уравнение или систему стандартными алгебраическими методами.

Итак, нужно запомнить, что метод четности / симметричности состоит из *двух* частей: собственное четность / симметричность помогает найти возможные значения параметра, после чего проверка позволяет отсечь посторонние значения.

45. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + 2a \\ x \geqslant y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

46. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

47. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

48. Найти все такие a и b, что система

$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

49. Найти все a, такие, что неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

имеет единственное решение.

50. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 1 = 0 \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

51. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{x^2+1}} - a\cos\frac{x^2-1}{x} + a^2 = \frac{5}{4}$$

имеет единственный корень.

52. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5 \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0 \\ -6 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1.3. Свойства функций

Иногда условие задачи может повергнуть школьника в ужас: в нем намешаны и логарифмы, и модули, и синусы, и еще Бог весть что. Алгебраически преобразовывать или решать такие задачи бесполезно, уж больно они сложны. Однако часть оказывается, что такие с виду ужасные задачи можно легко переформулировать на языке *свойств функций.* Третий метод как раз посвящен разбору таких задач.

К основным свойствам функций мы относим следующие:

- непрерывность;
- монотонное возрастание / убывание;
- наличие точек максимума / минимума.

Как правило, метод свойств функций работает в задачах, содержащих одну переменную. Необходимо выделить функцию (или несколько функций), понять, какими из перечисленных выше свойств они обладают, и записать условие задачи в терминах этих свойств.

53. Найти все значения параметра a, при которых любой корень уравнения

$$3\sqrt[5]{6{,}2x-5{,}2} + 4\log_5(4x+1) + 5a = 0$$

принадлежит отрезку $[1, 6]$.

54. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$$

имеет решение.

55. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$||x + 2a| - 3a| + ||3x - a| + 4a| \leqslant 7x + 24$$

выполнено при всех $x \in [0, 7]$.

56. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$4|x + a| + 2|x - a| + 2 = x + 9|x - 2| + 2|3a + 2|$$

имеет два различных корня.

57. Найти все значения параметра a, при которых для каждого вещественного x выполнено неравенство

$$|\cos x + a^2 - a - 1| + |2\cos x + a^2 - 6a + 10| \leqslant 4\cos x + |2a^2 - 7a + 6| + 4.$$

58. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$a^2 - 10a + 5\sqrt{x^2 + 25} = 4|x - 5a| - 8|x|$$

имеет решение.

59. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$a^2 + 7|x| + 49\log_7(2x^2 + 7) = 7a + 3|2x - 7a|$$

имеет решение.

60. Найти все значения параметра a, при которых для любых вещественных чисел x, y выполнено неравенство

$$13\sin x - 7|\sin x + y - 2a| + 3|\sin x - 2y - a - 1| \leqslant 16.$$

1.4. Разные задачи

В заключение этого этапа подготовки мы предлагаем набор задач, которые решаются разобранными выше методами. Нужно научиться не только правильно определять метод решения, но и делать это *быстро*.

61. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 2ay-a^2+1 \\ y+a \leqslant |x| \end{cases}$$
имеет ровно два решения?

62. Найти все a и b, такие, что система
$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$
имеет единственное решение (x_0, y_0).

63. Сколько решений имеет система
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ |x|+|y|=a \end{cases}$$
в зависимости от a?

64. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$x+1+2|x-2| = 8|x-a+2|+3|x-a-2|$$
имеет единственных корень.

65. Найти все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции
$$f(x) = x^2+2x-1+|x-a|$$
больше 2.

66. При каких значениях параметра b система
$$\begin{cases} y \geqslant (x-b)^2 \\ x \geqslant (y-b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

67. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

68. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1$$

имеет ровно восемь решений.

69. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \leqslant 0 \\ x^2 - 4x - 6a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

70. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left| x \cdot \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное количество решений.

71. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + a = 6\sin x \\ y^4 + z^2 = 6a \\ (a-3)^2 = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x + 9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и найти все решения для каждого найденного значения параметра a.

72. При каких значениях параметра a уравнение

$$||x| - a| = a^2$$

имеет ровно два корня?

73. При каких значениях параметра a минимум функции

$$f(x) = 3|x-a| + |x^2+x-2|$$

меньше 2?

74. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

75. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$3 - |x-a| > x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

76. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$2x^3 + 9x + 3|x+a-2| + 2|2x-a+2| + \sqrt[5]{2x-3} \leqslant 16$$

выполняется для всех значений $x \in [-2, 1]$.

77. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y \geqslant (x+y)^2 - x - 2y + a \\ x \geqslant (y-x)^2 - 3y + 2x + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

78. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax - |x| - |x+2| = \frac{a}{2}$$

имеет не менее двух решений?

79. При каких значениях параметра a неравенство

$$x^2 + y^2 \leqslant 6x - 4y + a^2 + a - 13$$

имеет не менее пяти целочисленных решений?

80. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x \end{cases}$$

имеет единственное решение.

81. Найти все значения параметра a, для которых уравнение

$$ax^2+|x|=|x+1|$$

не имеет решений.

82. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$2x+2|x-a|+|x-1|>3$$

выполняется при всех значениях x.

83. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-2a-5)^2+(y-3a+5)^2=16 \\ (x-a-2)^2+(y-2a+1)^2=81 \end{cases}$$

имеет единственное решение

84. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$a^2+5|x-2|+7^{x^2-4x+6}+4=2x+2|x-7a-2|$$

имеет хотя бы один корень.

85. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-9)^2+(y-5)^2=9 \\ (x+3)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

86. При каких значения параметра a неравенство

$$\frac{x-2a-4}{x+3a-2}\leqslant 0$$

выполняется для всех $x\in[1;3]$?

87. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} a(x^4+1) = y+1-|x| \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2. БКЗ

Уверенно освоив основные методы решения задач с параметром, школьник часто думает, что он гарантированно решит такую задачу на ЕГЭ. Однако на примере пробников легко убедиться, что это не так. А именно, возникает следующая ситуация: часть класса стабильно решает задачу С6 (увы, таких обычно мало), часть стабильно не решает (таких, как ни странно, тоже мало), а основная часть как будто играет в лотерею: сегодня один решил, второй не решил, завтра наоборот, послезавтра не решили оба, потом оба решили и т.д.

Нельзя допустить, чтобы результат ЕГЭ стал предметом везения или невезения! Это должен быть вопрос выучки. Поэтому важно добиться от школьника *гарантированного* решения задач. Для задачи с параметром ключевым моментом является определение метода решения. Если метод выбран правильно, то довести его до ответа — дело техники, уже наработанной школьником при освоении предыдущего раздела.

Таким образом, необходимо научить школьников быстро и безошибочно определять метод решения задач. Это второй этап в процессе подготовки.

Для этого предлагается система БКЗ (Большое Количество Задач). Суть в том, чтобы предложить школьнику на очень маленькое время (например, на 1 урок) очень большое количество задач (например, 10–12 штук). Конечно, за такое время *решить их полностью* он не сможет. Однако это и не нужно. Нужно лишь определить *идею или метод* решения задачи! Доводить его до численного ответа не нужно (техника уже отработана).

Важно научиться быстро замечать какие-то нюансы в условии, которые точно указывают на тот или иной метод. Также важно научиться быстро определять, что задача существенно нестандартна (т.е. ни один из разобранных ранее методов не подходит), и над ней нужно посидеть. Ну и, конечно, все это надо сделать быстро и с первого раза — времени на вторую попытку, как правило, нет.

На мой взгляд, это самое трудное задание, с которым школьник когда-либо столкнется. Поэтому не стоит ждать хороших результатов с первого раза. Вполне приемлемо, если класс в среднем справляется с четырьмя задачами из 12. Проведя БКЗ несколько раз, вполне можно улучшить этот результат на 6–7 задач.

88. При каких a функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$$

имеет более двух точек экстремума?

89. При каких a уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a(1+x^2)}{(1+x^2) - 2\sqrt{1+x^2}} = -3$$

имеет решение?

90. При каких a неравенство

$$|ax + 3| + |x + 3a| \leqslant (a+1)|x+3|$$

выполнено при всех отрицательных x?

91. При каких a множество решений неравенства

$$|3x - a| + 2 \leqslant |x - 4|$$

образует отрезок длины 1?

92. При каких a модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + a^2 - 4a + 12 = 0$$

максимален?

93. При каких a уравнение

$$\frac{5}{x+1} = a|x - 4|$$

имеет больше двух положительных корней?

94. При каких a система

$$\begin{cases} a(x^4+1) = y + 1 - |x| \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

95. При каких a уравнение

$$|\cos x + 3\sin x + a| = a - 3\cos x - \sin x$$

имеет решение на полуинтервале $(\pi; 3\pi/2]$?

96. При каких a система

$$\begin{cases} |x-1| + 7|y| = 1 \\ x^2 + 49y^2 + 4a + 1 = 2x \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения?

97. При каких a неравенство

$$\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right| < 3$$

выполнено при всех x?

98. При каких a решением неравенства

$$\sqrt{5-x} + |x-a| \leqslant 3$$

является отрезок?

99. При каких a для любого b система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет решение?

3. Нестандартные ситуации

К сожалению, универсальных методов решения задач не существует. И иногда (правда, очень редко) методов, разобранных нами в предыдущих разделах, не хватает. Поэтому на заключительном этапе подготовки необходимо не просто научиться видеть ситуации, когда базовые методы не работают, но и придумать что-то свое, новое, позволяющее решить данную задачу.

В качестве примеров таких «нестандартных ситуаций» мы выделим две «наиболее стандарнтные»: это задачи, решаемые *алгебраически* и задачи, решаемые *логически* (переход от общего к частному).

3.1. Алгебраический подход

Иногда встречаются задачи, где никаких особых соображений (геометрических, логических и т.п.) применять не нужно. Вместо этого необходимо тупо выполнить некоторые алгебраические преобразования (разложение на множители, возведение в квадрат, решение логарифмических уравнений...). Отметим, что в последнем основном ЕГЭ была дана именно такая задача.

100. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\log_a(x^2+4) > 1$$

выполняется для всех x.

101. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{1}{x+1}}(x^2+2|a|) > 0$$

выполнено при всех допустимых x?

102. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} axy + x - y + 3/2 = 0 \\ \quad x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

103. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x+ax+a}{x-2a-2} \geqslant 0 \\ x+ax > 8 \end{cases}$$

не имеет решений.

104. Найти все значения параметра a, для которых уравнение

$$8x^6 + (a-x)^3 + 2x^2 + a = x$$

имеет хотя бы один корень.

105. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 1)^2 = 4a^2(5x^2 - x + 1)$$

имеет ровно три различных корня?

106. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x+2)(x+4) + 5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}} - (a+2)(a-3) = 0$$

имеет единственное решение?

107. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\log_8(x+a) - \log_8(x-a))^2 - 12a(\log_8(x+a) - \log_8(x-a)) + 35a^2 - 6a - 9 = 0$$

имеет ровно два решения.

3.2. Переход от общего к частному

Иногда встречаются задачи с условиями вида «при каких a для *любого* b. . . ». В таких ситуациях часто бывает полезно зацепиться за слова «*для любого* b». А именно, можно выбрать *одно* (или *несколько*) конкретное значение этого *любого* b и найти, при каких условиях условие справедливо для него одного. Иногда уже этого бывает достаточно.

108. Найти все пары $(a; b)$, при которых равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$$

выполнено при всех x.

109. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет решение при любом b.

110. Найти все a, при которых для любого b уравнение

$$\cos(b + ab + bx) + 2\cos(b^2 x) = 3a^2$$

имеет хотя бы один корень.

111. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2 y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b.

112. При каких a система

$$\begin{cases} a^x + a^y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = b^2 + 1 \end{cases}$$

имеет решение для любого b?

113. При каких a для любого b найдется такое c, что система

$$\begin{cases} bx - y = ac^2 \\ (b-6)x + 2by = c + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

114. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0 \\ 2bx + (b-6)y - 8z = 8 \end{cases}$$

имеет решение $(x; y; z)$ для любого b.

115. Найти все такие значения a, что при любом c система

$$\begin{cases} 2(c^2+2c+2)^y+(1+4x^4)^a=3 \\ x^3y^3+(c+1)xy+a^2-a=6 \end{cases}$$

имеет не менее одного решения $(x;y)$.

116. Найти все b, при которых оба неравенства системы

$$\begin{cases} 2b\sin^2(x+y)+b>4b^3\sin(x+y)+b^3 \\ x^2+(b^4+1)y^2+b>2xy \end{cases}$$

выполняются при любых x и y.