УДК 519.12 + 517.938.5

Об асимптотике эргодических перестановок Арнольда

Д. А. Байгушев[1]

Аннотация

В данной заметке исследуется специальный класс перестановок, введенный В.И. Арнольдом в 1958 г. в порядке упрощения задачи о перекладывании отрезков.

В 1958 г. на своем семинаре В.И. Арнольдом была поставлена следующая задача (так называемая *задача о перекладывании отрезков*; см. [1]). Разобьем отрезок $[0, 1]$ на три непустые части $\{A, B, C\}$ и переложим их в порядке $\{C, B, A\}$. *Исследовать получившуюся динамическую систему на отрезке* $[0, 1]$.

Эта задача активно изучалась, в результате чего были обнаружены связи этой задачи с самыми разными разделами математики (см., например, [4]).

Но в тоже время осталась без внимания другая задача Арнольда, поставленная на том же семинаре (см. [3]): *исследовать дискретный аналог задачи о перекладывании отрезков*; в частности, *исследовать дискретные аналоги динамических систем со всюду плотными траекториями.*

Естественно считать, что дискретным аналогом перекладывания отрезков является перекладывание конечного множества точек, т.е. *перестановка.* Более точно, рассмотрим множество $\{1, 2, \ldots, n\}$. Разобьем его на три непустых блока $\{A, B, C\}$ размеров a, b и c соответственно и переставим их в порядке $\{C, B, A\}$. Получившуюся перестановку мы будем называть (C, B, A)-*перестановкой* (или *перестановкой Арнольда*) и будем обозначать ее через $\sigma(a, b, c)$.

Перестановки можно рассматривать как динамические системы на конечном пространстве. Одним из важных свойств динамической системы является плотность ее траекторий. В случае перестановок это условие означает, что перестановка состоит из одного цикла. Такие перестановки мы будем называть *эргодическими.*

Основной целью данной заметки является исследование эргодических перестановок Арнольда. А именно, мы докажем критерий, позволяющий определить эргодичность перестановки Арнольда, зная размеры блоков A, B и C, а также вычислим асимптотику доли эргодических перестановок Арнольда (задача 8 из [3]).

Замечание 1. Отметим, что доля эргодических перестановок среди всех перестановок длины n равна $1/n$ и стремится к 0 при $n \to \infty$.

Для изучения эргодических перестановок Арнольда нам понадобится следующее определение.

Определение. Назовем *шагами перестановки* σ величины $\sigma(i) - i$, где $i = 1, \ldots, n$.

Отметим, что в (C, B, A)-перестановках возможны всего три шага, которые мы обозначим через S_C, S_B и S_A соответственно. А именно, S_C — шаг, на который увеличивается число, переходящее в число из блока C, S_B — из блока B и S_A — из блока A.

Легко видеть, что

$$S_C = a + b, \quad S_B = a - c, \quad S_A = -b - c.$$

Кроме того, $S_B = S_A + S_C$.

[1]Лицей «Вторая школа»; *e-mail*: IDanila24@gmail.com

Теорема 1 (Критерий эргодичности)**.** *Перестановка Арнольда* $\sigma(a, b, c)$ *эргодична тогда и только тогда, когда НОД*$(S_A, S_C) = 1$.

Доказательство. «$\Rightarrow$» Если НОД$(S_A, S_C) = d \neq 1$, то, передвигаясь по циклу перестановки $\sigma(a, b, c)$ с шагами S_A, S_B и S_C, мы не сможем попасть из 1 в 2, т. к. мы будем попадать только в числа, сравнимые с 1 по модулю d.

«$\Leftarrow$» Рассмотрим какой-либо цикл перестановки $\sigma(a, b, c)$. Пройдя по нему один раз, мы получим: $xS_A + yS_B + zS_C = 0$ (здесь x — количество шагов S_A в цикле, y — количество шагов S_B и z — количество шагов S_C).

Подставив в это равенство значения шагов, получаем: $(x + y)(b + c) = (y + z)(a + b)$.

Т. к. НОД $(a + b, b + c) = 1$, то $\begin{cases} x + y \geqslant a + b \\ y + z \geqslant b + c \end{cases}$.

Сложим два получившихся неравенства: $x + 2y + z \geqslant a + 2b + c$.

Т. к. $y \leqslant b$, то $x + y + z \geqslant a + b + c = n$, т.е. длина цикла не меньше n. Но это означает, что она в точности равна n, и перестановка $\sigma(a, b, c)$ эргодична. □

Теорема 2. *Доля эргодических перестановок Арнольда асимптотически равна* $6/\pi^2 \approx 0,608$ *(рис. 1).*

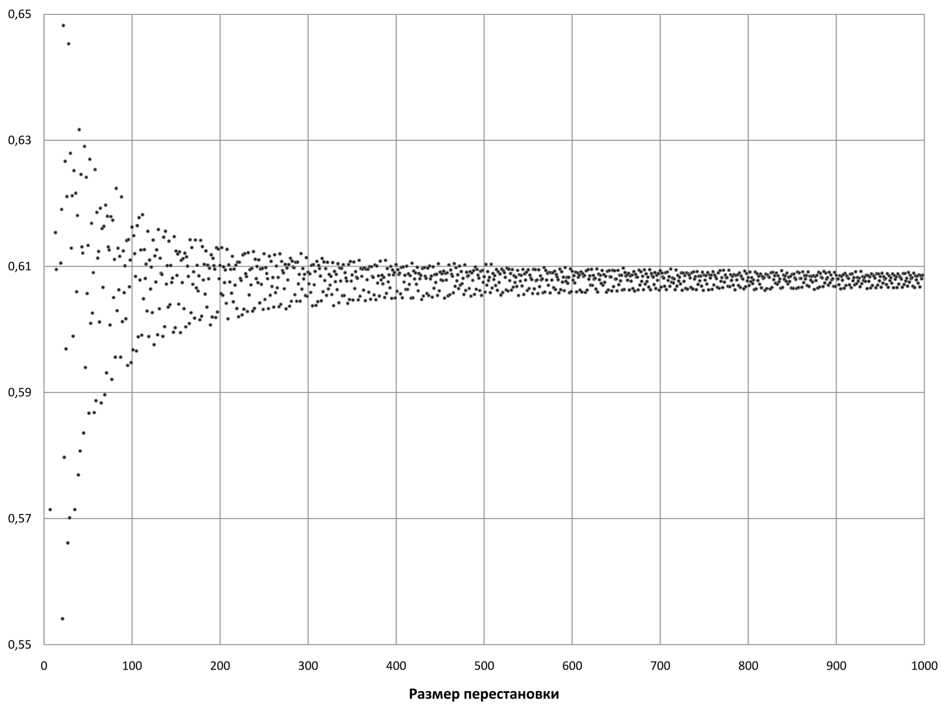

Рис. 1: Доли эргодических перестановок Арнольда.

Доказательство. Рассмотрим перестановку Арнольда $\sigma(a, b, c)$. Положим $x := b + c = n - a$ и $y := a + b = n - c$. Тогда множество перестановок Арнольда соответствует множеству точек

$$\triangle_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x < n,\ y < n,\ x + y > n\}.$$

В то же время согласно критерию эргодичности множество эргодических перестановок Арнольда соответствует множеству точек в $\triangle_n$ со взаимно простыми координатами.

Таким образом, нам необходимо вычислить долю точек в $\triangle_n$ со взаимно простыми координатами при $n \to \infty$. Для этого мы воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3 (Арнольда о равномерной распределенности; см. [2])**.** *Множество целочисленных точек со взаимно простыми координатами равномерно распределено на плоскости (рис. 2), т.е. число точек этого множества в гомотетично растянутой в N раз области плоскости становится асимптотически пропорциональным произведению площади этой области на число N^2 при $N \to \infty$. Коэффициент этой пропорциональности (плотность) оказывается равным* $1/\zeta(2) = 6/\pi^2$.

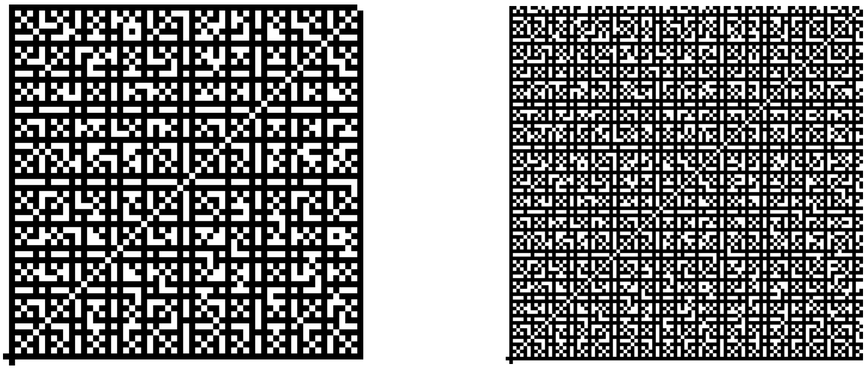

Рис. 2: Равномерное распределение: черным цветом показаны точки со взаимно простыми координатами, а белым — остальные.

Применим теорему Арнольда о равномерной распределенности к выпуклым оболочкам множеств $\triangle_n$. Их площади асимптотически равны $|\triangle_n|$, поэтому доля точек в $\triangle_n$ со взаимно простыми координатами асимптотически (при $n \to \infty$) равна $1/\zeta(2) = 6/\pi^2$, что и требовалось доказать. $\square$

В заключение отметим, что теорема 2 хорошо подтверждается численными экспериментами (см. таблицу).

размер перестановки	10	10^2	10^3	10^4
всего (C, B, A)-перестановок	36	4851	498501	49985001
эргодических (C, B, A)-перестановок	24	2964	303392	30389486
доля эргодических (C, B, A)-перестановок	**0,6**66667	**0,6**11008	**0,60**8609	**0,60797**2
константа $6/\pi^2$	**0,6**07927	**0,6**07927	**0,60**7927	**0,60792**7

Автор благодарит П.В. Бибикова за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Арнольд В.И. *Задачи Арнольда.* М.: ФАЗИС, 2000 г.

[2] Арнольд В.И. *Равномерное распределение неделимых векторов в целочисленном пространстве.* Изв. РАН. Сер. матем. **79**:1 (2009), с. 21–29.

[3] Арнольд В.И. *Что такое математика?* М.: МЦНМО, 2008 г.

[4] Каток А.Б., Синай Я.Г., Степин А.М. *Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой.* Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., **13**, ВИНИТИ, М., 1975, с. 129–262