Semper in motu[1]

П. В. Бибиков

1 Введение

Когда вы только начинали изучать геометрию и пробовали рисовать первые чертежи, часто рисунки получались не очень хорошими. И дело не в том, что линии были кривыми и неровными; хуже было то, что извечная тяга с прекрасному заставляла вас рисовать треугольники равнобедренными (а то и равносторонними), прямые перпендикулярными, углы равными... Глядя на такой чертеж, вы часто ссылались на эти его особенности как на исходные данные задачи. Разумеется, подобное решение не могло считаться правильным и строгим, поскольку на самом деле вами были разобраны лишь простые частные случаи, а общее рассуждение, как правило, было гораздо сложнее и разительно от этих частных случаев отличалось.

Но... что, если вы узнаете, что есть способ заставить эти частные случаи работать? что если существует метод, позволяющий реализовать это естественное человеческое стремление к упрощению задачи путем разбора пары частных случаев? что если разбор *частных случаев* иногда позволяет получить *полное решение*?..

В чем же заключается этот-самый метод, позволяющий из частных случаев выводить общие? По существу этот метод является геометрическим воплощением простой идеи из курса алгебры 7-8 класса: *если две линейные функции совпадают в двух точках, то они совпадают всюду.*

О каких линейных функциях может идти речь в геометрии? Идея заключается в том, чтобы рассмотреть функции вида $A(t) = A(0) + t \cdot \overline{v}$, где $A(t)$ — точка на евклидовой плоскости. Как нужно понимать такую запись? Очень просто: мы рассматриваем функцию, которая каждому вещественному числу t ставит в соответствие точку $A(t)$ на евклидовой плоскости. Причем мы рассматриваем самые простые функции: линейные (в системе координат координаты точки $A(t)$ будут линейными функциями от переменной t). Это означает, что функция может быть задана значениями лишь в двух точках. Поэтому если некоторое геометрическое условие хорошо взаимодействует с таким линейным движением (ниже мы четко сформулируем такие условия), то достаточно проверить его справедливость всего в двух точках! А эти точки можно взять так, как нам удобно; это и есть те-самые «частные случаи», рассмотрев которые, удается доказать утверждение и в общем виде.

Здесь также полезна механическая интерпретация линейных функций $A(t)$: *мы заставляем точки двигаться линейно.* Свойство линейности можно трактовать как геометрически (точки $A(t)$ лежат на одной прямой и проходят равные отрезки за равные промежутки времени), так и алгебраически (зависимость координат от переменной t линейна). Поэтому, сдвинув точки так, как нам это удобно, можно добиться выполнения условий задачи для каких-то *двух* частных случаев, и тогда из линейности следует справедливость условий задачи и в общем случае.

Для того, чтобы эту идею можно было применять на практике, нам необходимо лучше разобраться с линейно движущимися объектами и понять, какие их свойства сохраняются при линейном движении, а какие нет.

2 Поехавшие точки

Прежде всего дадим следующее определение.

[1] Всегда в движении (лат.)

Определение. Предположим, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ определена точка $A(t)$, вектор $\overline{a}(t)$ или прямая $\ell(t)$. Будем говорить, что объекты $A(t)$, $\overline{a}(t)$ или $\ell(t)$ *линейно зависят от* t (или *двигаются линейно*), если существует такой вектор $\overline{v}$, что

- $A(t) = A(0) + t \cdot \overline{v}$;
- $\overline{a}(t) = \overline{a}(0) + t \cdot \overline{v}$;
- $\ell(t) = \ell(0) + t \cdot \overline{v}$.

Иначе говоря, для точек и прямых линейное движение — это просто параллельный перенос на вектор $t \cdot \overline{v}$.

Вектор $\overline{v}$ будем называть *скоростью* перемещения точки $A(t)$, вектора $\overline{a}(t)$ или прямой $\ell(t)$.

Таким образом, факт линейного движения точек и прямых естественно ассоциировать с их параллельным переносом. Именно так полезно пытаться увидеть линейные движения на практике. Чтобы получше с ними освоиться, докажем несколько несложных свойств линейного движения.

Задача 1. Докажите следующие утверждения.

1. Вектор, соединяющий две линейно движущиеся точки, движется линейно.
2. Середина отрезка, соединяющего две линейно движущиеся точки, движется линейно.
3. Параллельная проекция линейно движущейся точки на неподвижную прямую движется линейно.
4. Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.

Замечание 1. Обратите внимание, что прямая, проходящая через линейно движущиеся точки, вовсе не обязана двигаться линейно!

Теперь давайте разберемся, как можно формализовать идею рассмотрения конкретных положений точек для доказательства общих результатов. Допустим, нам необходимо доказать, что три какие-то прямые пересекаются в одной точке. Давайте *линейно подвигаем эти прямые.* Предположим, что нам удалось найти такое положение этих прямых, что факт их пересечения в одной точке устанавливается легко (например, эти прямые являются высотами какого-то треугольника). Если таких положений два, то отсюда будет следовать справедливость пересечения в одной точке и *при любом другом положении* (просто потому, что факт пересечения в одной точке является линейным условием на параметр сдвига t, а линейное условие определяется двумя различными параметрами). Вот и все!

Зафиксируем условия, которые наиболее часто встречаются на практике и соответствующее количество положений наших объектов, для которых эти условия нужно проверять.

Предложение 1. *а) Если две линейно движущиеся точки совпадают при двух значениях параметра t, то они совпадают всегда.*

б) Если три линейно зависящих от t прямые пересекаются в одной точке при двух значениях параметра t, то они всегда пересекаются в одной точке.

в) Если линейно меняющиеся векторы перпендикулярны при трех значениях параметра t, то они всегда перпендикулярны.

г) Если линейно меняющиеся векторы коллинеарны при трех значениях параметра t, то они всегда коллинеарны.

д) Если существуют три момента времени, когда три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой, о они всегда лежат на одной прямой.

Доказательство. Мы докажем п.б), оставив остальные пункты читателю в качестве упражнения. Для доказательства удобнее всего использовать язык линейной алгебры. А именно, прямые $\ell_i := \{a_i x + b_i y + c_i = 0\}$, $i = 1, 2, 3$, пересекаются в одной точке если и только если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь линейно подвигаем прямые ℓ_i, рассмотрев множество прямых $\ell_i(t) = \ell_i + t\overline{v}_i$, где $\overline{v}_i = (v_{i,x}, v_{i,y})$ — соответствующие векторы скоростей. Тогда условие пересечения прямых $\ell_1(t)$, $\ell_2(t)$ и $\ell_3(t)$ в одной точке равносильно условию

$$F(t) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + t(a_1 v_{1,x} + b_1 v_{1,y}) \\ a_2 & b_2 & c_2 + t(a_2 v_{2,x} + b_2 v_{2,y}) \\ a_3 & b_3 & c_3 + t(a_3 v_{3,x} + b_3 v_{3,y}) \end{vmatrix} = 0.$$

Заметим, что условие $F(t) = 0$ представляет собой линейное уравнение на t (в этом легко убедиться, разложив определитель по третьему столбцу). Поэтому, если нашлось два момента времени t_1 и t_2, таких, что $F(t_1) = F(t_2) = 0$, то в силу линейности функции F получаем, что $F \equiv 0$. Отсюда следует, в частности, что $F(0) = 0$, поэтому исходные прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 также пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать. □

Задача 2. Докажите остальные пункты теоремы. Для этого также полезно переформулировать условия этих пунктов на языке определителей или скалярных произведений.

Отличным примером, иллюстрирующим идею применения поехавших точек и прямых является следующее утверждение, которое известно как *теорема о прямой Гаусса.*

Теорема 1 (Прямая Гаусса). *На плоскости проведено четыре прямые общего положения. Докажите, что середины отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся прямых, лежат на одной прямой (см. рис. 1).*

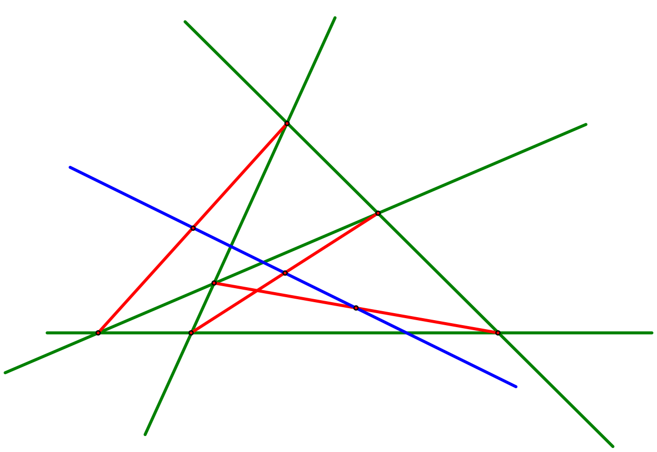

Рис. 1:

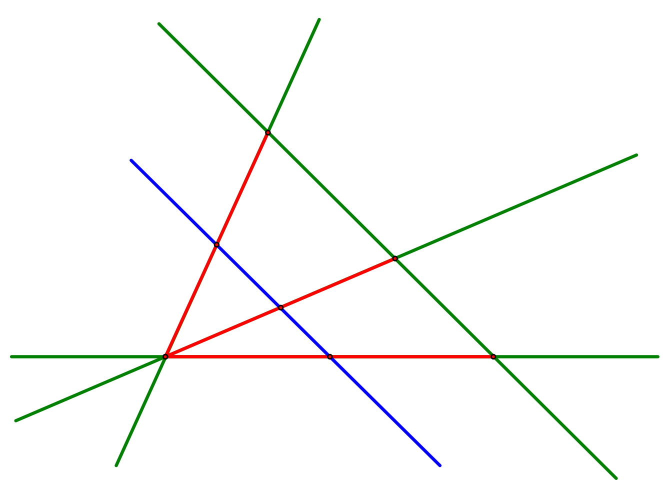

Рис. 2:

Доказательство. Прежде всего необходимо понять, что именно мы будем двигать. Поскольку речь в условии идет о прямых, то логично попробовать подвигать одну из прямых. Из задачи 1 следует, что середины трех красных отрезков также будут двигаться линейно. Согласно предложению 1д, нам нужно найти три таких положения этой прямой, при которых коллинеарность середин красных отрезков будет очевидна. Для этого нам необходимо выродить нашу конфигурацию (рассмотреть простые частные случаи). Как это сделать? Например, склеить некоторые точки! Давайте сдвинем нашу прямую в одну из *трех* точек пересечения оставшихся прямых (см. рис. 2). В условии прямые были заявлены как прямые общего положения, а мы специально сделали их прямыми необщего положения, заставив три прямые пройти через одну точку. В таком случае коллинеарность середин красных отрезков очевидна: все они лежат на общей средней линии трех возникших треугольников. Осталось применить предложение 1д и сказать, что теорема доказана и в общем случае. □

Перед тем как переходить к конкретным задачам, следует предостеречь читателя от чрезмерной эйфории, возможно, возникшей у него после прочтения доказательства теоремы о прямой Гаусса. Легкость, с которой мы доказали эту теорему, объясняется далеко не самым простым доказательством предложения 1, являющегося основой метода поехавших точек. Поэтому, применяя данный метод на практике, все же необходимо хотя бы кратко пояснять, почему он действительно работает. Автор неоднократно сталкивался с ситуацией, когда школьники знали данный метод, но не могли строго его обосновать, а преподаватели, проверяющие их задачи, данного метода не знали и даже не могли поверить в то, что разбор пары частных случаев действительно влечет полное решение. Хочется верить, что данная статья поможет, с одной стороны, формализовать данный метод, дав необходимые строгие доказательства, а с другой — популяризовать его, сделав более известным и употребимым. Последнее представляется особенно важным, поскольку, как мы увидим в дальнейшем, очень многие олимпиадные задачи допускают простое и красивое решение с помощью поехавших точек. К их числу относится и задача 1 с Международной Математической Олимпиады 2018 г.

Теперь перейдем к решению задач с помощью данного метода. Перед этим сформулируем ситуации, в которых использование поехавших точек и прямых может быть полезно. Таких ситуаций обычно две:

- утверждения, связанные с наличием равных отрезков, которые находятся далеко друг от друга (и не образуют простых конфигураций типа средней линии). В таком случае полезно подвигать концы этих отрезков или точки на них (например, середины);

- утверждения, связанные с пересечением трех прямых в одной точке и с попаданием трех точек на одну прямую (предложения 1б и 1д), а также параллельностью или перпендикулярностью двух прямых (предложения 1в и 1г).

Также полезно будет сказать, как именно стоит выбирать объекты, которые нужно двигать. Руководствоваться полезно следующими соображениями:

- не нужно двигать «стартовые» объекты, такие, как вершины исходного треугольника, потому что тогда вместе с ними поедет и вся конфигурация, и следить за ней будет тяжело;

- не двигать жестко закрепленные объекты, особенно связанные с окружностями (поскольку окружность — объект нелинейный);

- часто бывает полезно двигать точки в такие положения, которые вырождают конфигурацию; обычно этого удается добиться, склеив движущуюся точку с какой-то неподвижной;

- иногда полезно заставить точки двигаться так, чтобы их скорости были пропорциональны (а не равны); часто нет необходимости даже задумываться над точным значением коэффициента пропорциональности, достаточно лишь правильно описать само движение.

Особенно следует отметить, что иногда жесткость некоторых объектов в условии задачи оказывается мнимой! Т.е. утверждение задачи справедливо в гораздо большей общности, нежели той, которая предлагается вам. Сделано это, как правило, с целью запутать решателя и скрыть истинные идеи решения.

Задача 3. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. На отрезках BC_1 и AB_1 отмечены точки P и Q, такие, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

Задача 4. Диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что перпендикуляры из середин двух соседних сторон к противоположным сторонам пересекаются на диагонали.

Задача 5. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB и AC отмечены точки C_1 и B_1, такие, что $\angle AB_1M = \angle AC_1M$. Докажите, что перпендикуляры, восстановленные из точек B_1, C_1, M к сторонам треугольника, на которых они лежат, пересекаются в одной точке.

Задача 6. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 и B_1. Докажите, что прямая, соединяющая ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения медиан треугольников ABB_1 и ACC_1.

Рассмотрим более подробно задачу **6**. В этой задаче нам впервые встречаются замечательные точки треугольника: ортоцентр H и точка пересечения медиан M. Возникает естественный вопрос: верно ли, что при линейном движении вершин A, B, C треугольника эти точки также двигаются линейно? Попробуем разобраться.

Легче всего обстоит дело с точкой пересечения медиан. Она действительно будет двигаться линейно. Это можно понять, например, из известной формулы

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

для координат точки M. Поскольку координаты вершин A, B и C меняются линейно, то и координаты точки M будут меняться линейно, что и означает линейность ее движения.

С точкой пересечения высот H все сложнее. Легко придумать пример линейного движения вершин треугольника, которое влечет нелинейное движение точки H (например, можно двигать вершину A по прямой, не проходящей через две неподвижные вершины B и C). Однако в некоторых простых случаях линейность движения точки H все же имеет место быть. Наиболее часто встречаются следующие две ситуации:

1. вершины B и C треугольника ABC движутся линейно из точки A в одном направлении по прямым, проходящим через A, а вершина A неподвижна;

2. вершина C движется линейно по прямой AC, а вершины A и B неподвижны.

Почему в этих случаях точка пересечения высот H также будет двигаться линейно? Это сразу следует из п.3 задачи 1: необходимо лишь реализовать точку H как параллельную проекцию линейно движущейся точки на неподвижную прямую. В первой случае это проекция точки B на неподвижную прямую, проходящую через A перпендикулярно BC, а во втором — проекция точки C на высоту, проведенную из вершины B.

В задаче **6** очевидно, имеет место первый случай. В дальнейшем мы встретим и второй. Попробуйте теперь завершить решение этой задачи самостоятельно.

3 Поехавшие точки и биссектрисы

В заключение рассказа о поехавших точках опишем еще одну связанную с ними конструкцию. В некоторых ситуациях поехавшие точки не дают сразу полного решения задачи, однако являются существенным элементом решения. Мы особенно подробно остановимся на конфигурации, связанной с биссектрисой угла треугольника, поскольку именно она наиболее часто возникает на практике. Опишем идею применения поехавших точек в данной конфигурации на примере следующей задачи.

Задача 7. Пусть на сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки A_0 и C_0 соответственно, а точки M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0. Докажите, что если $AA_0 = CC_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе $\angle ABC$ (см. рис. 3).

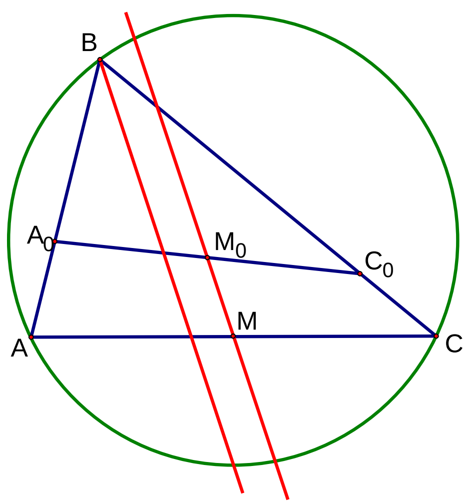

Рис. 3:

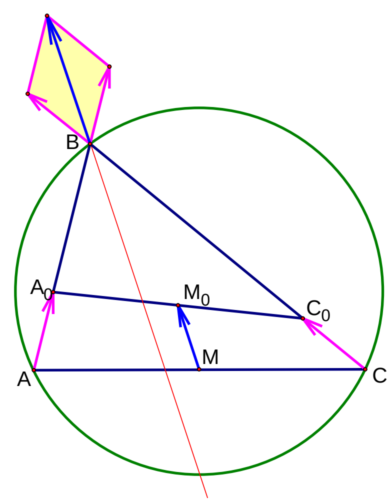

Рис. 4:

Решение. Наличие равных отрезков, плохо расположенных друг относительно друга, наводит на мысль подвигать концы этих отрезков. Пусть точки A_0 и C_0 линейно выехали по отрезкам BA и BC с одинаковыми по модулю скоростями $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_C$ в сторону точки B. Тогда точка M_0, как следует из задачи **1**, будет двигаться линейно со скоростью $(\overline{v}_A + \overline{v}_C)/2$.

Хорошо бы увидеть эту скорость... Для этого нам нужно сложить векторы $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_C$. Это легко сделать, сдвинув их концы в точку B. Тогда, складывая их по правилу параллелограмма, мы получаем вектор $\overline{v}_A+\overline{v}_C$, коллинеарный биссектрисе угла $\angle ABC$ (см. рис. 4), поскольку наш параллелограмм является ромбом (скорости-то равны по модулю!). Поэтому вектор $(\overline{v}_A+\overline{v}_C)/2$ скорости точки M_0 также коллинеарен биссектрисе угла $\angle ABC$, что в свою очередь и означает параллельность прямых MM_0 и самой биссектрисы.

Замечание 2. Внимательный читатель скажет, что при решении этой задачи можно обойтись без поехавших точек, оставив лишь язык векторов. Это действительно так, однако стоит понимать, что найти применение векторов в конкретной задаче весьма непросто, а наличие конфигурации, соответствующей методу поехавших точек, скорее приведет вас именно к идее движения точек, что на самом деле ничуть не усложняет решение.

Конструкция, возникшая в этой задаче, является достаточно популярной. Например, с ней связана так называемая лемма о воробьях (подробнее об этой лемме можно прочитать в статье А. Полянского «Воробьями по пушкам», Квант, №2, 2012). Поэтому полезно запомнить, что наличие биссектрисы и точек на сторонах треугольника, удаленных на одинаковые расстояния от вершин напрашиваются на поехавшие точки. Причем идея здесь несколько иная по сравнению с предложением 1: вектор суммы скоростей точек, едущих по сторонам треугольника, коллинеарен биссектрисе. Эту идею можно встретить на олимпиадах самого высокого уровня.

Задача 8. Докажите, что прямая, проходящая через середину стороны треугольника параллельно биссектрисе угла напротив этой стороны, делит периметр треугольника пополам.

Задача 9. (Московская математическая олимпиада, 2009, 10 класс, №5) Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1 и B_1. Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1. Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C.

Задача 10. (Международная математическая олимпиада, 2018, №1) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E, такие, что $AD = AE$. К отрезкам BD и CE проведены серединные перпендикуляры, пересекающие описанную окружность треугольника ABC в точках F и G. Докажите, что прямые DE и FG параллельны или совпадают.

Автор выражает глубокую благодарность И.В. Яковлеву за многочисленные обсуждения, без которых данная статья не могла бы быть написана.

Решение. (Задача 1).

1. Пусть $A(t) = A(0) + t\overline{v}$ и $B(t) = B(0) + t\overline{w}$, тогда $\overline{A(t)B(t)} = \overline{A(0)B(0)} + t(\overline{w} - \overline{v})$.

2. Если $M(t)$ — середина отрезка $A(t)B(t)$, то $M(t) = M(0) + t\frac{\overline{v}+\overline{w}}{2}$.

3. Пусть m — неподвижная прямая, точка $A(t) = A(0) + t\overline{v}$ движется линейно, а $B(t)$ — проекция точки $A(t)$ на прямую m параллельно прямой p. Пусть $\overline{e} = \overline{A(0)B(0)}$ и $\overline{f}$ — направляющий вектор прямой m. Разложим вектор скорости $\overline{v}$ по базису $\{\overline{e}, \overline{f}\}$: $\overline{v} = \lambda\overline{e} + \mu\overline{f}$. Тогда $B(t) = B(0) + t(\mu\overline{f})$.

4. Пусть $\ell_1(t)$ и $\ell_2(t)$ — линейно движущиеся прямые и $P(t) = \ell_1(t) \cap \ell_2(t)$ — точка их пересечения. Положим $P_1(t) = \ell_1(t) \cap \ell_2(0)$ и $P_2(t) = \ell_2(t) \cap \ell_1(0)$. В силу п. 3 точки $P_1(t)$ и $P_2(t)$ движутся линейно со скоростями $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ (разумеется, эти скорости могут отличаться от скоростей прямых $\ell_1(t)$ и $\ell_2(t)$). Тогда $P(t) = P(0) + t(\overline{v}_1 + \overline{v}_2)$.

Решение. (Задача 2).

а) Перейдем в систему отсчета, связанную с точкой $B(t)$. Тогда точка $B(t) = B(0)$ неподвижна, а точка $A(t)$ по-прежнему движется линейно (в силу закона сложения скоростей). Тогда очевидно, что если точка $A(t)$ совпала с неподвижной точкой $B(t) = B(0)$ в два момента времени, то они совпадают во все моменты времени, что и требовалось доказать.

в) Условие перпендикулярности линейно движущихся векторов $\overline{a}(t) = \overline{a}(0) + t\overline{v}$ и $\overline{b}(t) = \overline{b}(0) + t\overline{w}$ равносильно условию $S(t) = (\overline{a}(t), \overline{b}(t)) = 0$ (здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение). В силу билинейности скалярного произведения, получаем:

$$S(t) = (\overline{a}(0) + t\overline{v}, \overline{b}(0) + t\overline{w}) = t^2(\overline{v}, \overline{w}) + t\big((\overline{a}(0), \overline{w}) + (\overline{b}(0), \overline{v})\big) + (\overline{a}(0), \overline{b}(0)) = 0$$

— уравнение не выше второго порядка. Поэтому если выражение $S(t)$ зануляется в трех различных моментах времени, то оно равно тождественному нулю, что и означает ортогональность векторов $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$ во все моменты времени.

г) Условие коллинеарности линейно движущихся векторов $\overline{a}(t) = \overline{a}(0) + t\overline{v}$ и $\overline{b}(t) = \overline{b}(0) + t\overline{w}$ равносильно условию $K(t) = \det(\overline{a}(t), \overline{b}(t)) = 0$ (здесь $\det(\cdot, \cdot)$ — определитель матрицы размера 2×2, составленной из координат векторов, записанных по столбцам). Вычисляя этот определитель, мы получаем многочлен $K(t)$ от переменной t степени не выше 2. Поэтому, аналогично п.в), зануление многочлена $K(t)$ в трех различных точках влечет тождество $K(t) \equiv 0$, что и означает коллинеарность векторов $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$ во все моменты времени.

д) Этот пункт легко следует из п.г): коллинеарность точек $A_1(t)$, $A_2(t)$ и $A_3(t)$ равносильна коллинеарности векторов $\overline{A_1(t)A_2(t)}$ и $\overline{A_1(t)A_3(t)}$.

Решение. (Задача 3). Пусть точки P и Q линейно движутся из точек C_1 и B_1 с одинаковыми скоростями. Согласно предложению 1д), нам необходимо найти три момента времени, когда середина отрезка PQ лежит на отрезке B_1C_1. Первый момент времени — стартовый, т.е. $P = C_1$ и $Q = B_1$, второй — когда $Q = A$ (тогда $QC_1 = QB_1 = PC_1$ и точка C_1 — середина PQ), а третий — когда $P = A$ (тогда $PB_1 = PC_1 = QB_1$ и точка B_1 — середина PQ). Обратите внимание, что в процессе доказательства точки P и Q выехали за пределы отведенных им отрезков BC_1 и AB_1! Это и есть мнимая жесткость условия: на самом деле его можно усилить, причем это усиление и приводит к решению!

Решение. (Задача 4). Пусть $ABCD$ — наш четырехугольник, точки M и N — середины отрезков BC и CD соответственно. Будем линейно двигать прямую MN. Тогда перпендикуляры, опущенные из точек M и N на прямые AD и AB, также будут двигаться линейно. Согласно предложению 1б), нужно найти два положения прямой MN, в которых факт пересечения этих перпендикуляров на диагонали будет очевиден. Такими положениями является, во-первых, случай $MN = BD$ (тогда наши перпендикуляры и диагональ AC — это три высоты в треугольнике

ABD), и во-вторых, случай, когда прямая MN пройдет через вершину C (тогда точка C и будет общей точкой диагонали AC и наших перпендикуляров).

И снова мы видим, что жесткость точек M и N является мнимой: на самом деле то, что они являются серединами сторон, не важно; важно лишь, что $MN \parallel AC$, и именно это условие при линейном движении мы сохраняем.

Решение. (Задача 5). Эта задача — пример ситуации, когда точки необходимо двигать с разными по модулю скоростями. А именно, будем двигать точки C_1 и B_1 по сторонам AB и AC соответственно в направлении от вершины A со скоростями $\overline{v}$ и $\overline{w}$, где $|\overline{v}|/|\overline{w}| = MC_1/MB_1$. Тогда в произвольный момент времени t треугольники $B_1B_1(t)M$ и $C_1C_1(t)M$ подобны по второму признаку, поэтому $\angle AB_1(t)M = \angle AC_1(t)M$. Значит, наше линейное движение согласовано с условием задачи, и согласно предложению 1б), достаточно найти два положения точек $B_1(t)$ и $C_1(t)$, для которых условие будет очевидным. Первое такое положение — это середины сторон AB и AC (тогда наши перпендикуляры — это просто серединные перпендикуляры треугольника ABC, пересекающиеся в центре описанной окружности), а второе — это основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AB и AC (тогда точка M и будет точкой пересечения трех перпендикуляров).

Решение. (Задача 6). Обозначим через H и H_1 ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1, а через M_B и M_C — точки пересечения медиан треугольников ABB_1 и ACC_1 соответственно. Будем линейно двигать точки B_1 и C_1 из точки A (иначе говоря, мы двигаем линейно прямую B_1C_1). Тогда, как мы выяснили, точки H, H_1, M_B и M_C тоже будут двигаться линейно (правда, точка H неподвижна, но нам это не важно). Согласно задаче 1, п.1, векторы $\overline{HH_1}$ и $\overline{M_BM_C}$ тоже двигаются линейно. Поэтому необходимо найти три положения прямой B_1C_1, в которых перпендикулярность этих векторов очевидна.

Первый случай соответствует положению $C_1 = B$. Тогда $HH_1 \perp AC$, а $M_BM_C \parallel AC$ в силу теоремы Фалеса (точки пересечения медиан M_B и M_C делят медианы, проведенные из точки B в одинаковом отношении $2:1$), откуда $HH_1 \perp M_BM_C$. Второй случай $B_1 = C$ доказывается аналогично.

Третий случай соответствует стартовому положению $B_1 = C_1 = A$. При таких вырождениях необходимо грамотно пояснить, что собой представляют точки H_1, M_B и M_C, поскольку треугольник AB_1C_1 схлопывается в точку, а треугольники ABB_1 и ACC_1 — в отрезки. Здесь удобно воспользоваться непрерывностью линейной функции, из которой следует, что $H_1 = A$, а точки M_B и M_C лежат на отрезках AB и AC и делят их в одинаковом отношении $2:1$, считая от точки A. Тогда $HH_1 \perp BC$ и $M_BM_C \parallel BC$ по теореме Фалеса. Следовательно, $HH_1 \perp M_BM_C$, и третий случай нами также разобран.

Решение. (Задача 8). Без ограничения общности будем считать, что $BC > AC$. Отметим на стороне BC точку C_0, такую, что $AB = CC_0$. Тогда по задаче **7** середина X отрезка BC_0 лежит на прямой, проходящей через середину M стороны AC параллельно биссектрисе угла $\angle ABC$. С другой стороны, очевидно, что $MA + AB + BX = MC + CC_0 + C_0X$, поэтому точка X делит периметр треугольника ABC пополам.

Решение. (Задача 9). Ключевым моментом в этой задаче является соображение о том, что вневписанные окружности, грубо говоря, не при чем. Более точно, утверждение задачи остается справедливым для любых точек A_1, B_1 на сторонах CA и CB, для которых $AB_1 = BA_1$ (в случае, когда A_1 и B_1 — это точки касания, это равенство следует из свойств отрезков касательных). Поэтому в данной задаче нужно линейно двигать точки A_1 и B_1 из вершин B и A с одинаковыми по модулю скоростями. Обратите внимание, опять мнимая жесткость!

Теперь нужно понять, как будут двигаться ортоцентры A_2 и B_2. Когда мы разбирали задачу **6**, мы доказали, что при таком движении точек A_1 и B_1 соответствующие ортоцентры A_2 и B_2 тоже двигаются линейно (это тот-самый случай 2, который до сих пор нам не встречался), причем их стартовая позиция — это ортоцентр H треугольника ABC, а прямые, по которым они двигаются — это в точности высоты AH и BH. Однако нам потребуется более сильное утверждение: ортоцентры A_2 и B_2 двигаются с одинаковыми по модулю скоростями. Это ожидаемо, поскольку как иначе использовать равенство скоростей точек A_1 и B_1?

Доказать это легче всего простым счетом. Обозначим через x длину отрезка A_1B. Тогда длина отрезка HA_2 равна $x \operatorname{ctg} \angle BAC$ и не зависит только от длин сторон треугольника CAA_1. Поэтому длина отрезка HB_2 будет точно такой же, т.к. $A_1B = B_1A$.

Теперь самое время понять, при чем здесь биссектриса угла $\angle ACB$ и почему она должна быть перпендикулярна прямой A_2B_2. Возможно, сходу это не очень понятно, но зато можно указать другую биссектрису, которая перпендикулярна прямой A_2B_2. Это биссектриса треугольника A_2B_2H, который, как мы доказали, является равнобедренным. Поэтому осталось доказать, что биссектриса угла $\angle AHB$ параллельна биссектрисе угла $\angle ACB$. Мы полностью убрали из рассмотрения непонятные ортоцентры A_2 и B_2!

Дальше уже дело техники. Например, можно рассуждать так. Пусть P и Q — основания высот AH и BH соответственно. Рассмотрим четырехугольник $CPHQ$. Пусть биссектриса угла $\angle PCQ$ пересекает прямую HP в точке K. Тогда

$$\angle CKP = 90^\circ - \angle PCQ/2 = 90^\circ - (180^\circ - \angle PHQ)/2 = \angle PHQ/2,$$

откуда и следует искомая параллельность. Задача решена!

Решение. (Задача 10). Как мы сейчас увидим, рассуждения, необходимые в этой задаче, почти дословно повторяют решение задачи **9** с заменой ортоцентра на центр описанной окружности.

Ясно, что необходимо линейно двигать точки D и E из вершины A с одинаковыми скоростями. Конечно, прямая DE будет двигаться линейно. Однако линейность движения прямой FG совершенно неочевидна (хотя она имеет место быть). Поэтому постараемся использовать связь наших точек с биссектрисой угла $\angle BAC$. Ясно, что эта биссектриса перпендикулярна DE. Если мы докажем, что эта же биссектриса перпендикулярна FG, то задача будет решена.

Заметим, что если точки D и E линейно двигаются по прямым AB и AC с одинаковыми скоростями, то серединные перпендикуляры $p(t)$ и $q(t)$ к отрезкам DB и EC тоже будут двигаться линейно с одинаковыми скоростями, равными половинам скоростей точек D и E. Рассмотрим точки $P(t) = p(t) \cap q(0)$ и $Q(t) = q(t) \cap p(0)$. Ясно, что точки $P(t)$ и $Q(t)$ двигаются линейно. Более того, рассуждая как в задаче **9**, легко показать, что скорости точек $P(t)$ и $Q(t)$ равны. Это означает, что точка $O(t)$ пересечения $p(t)$ и $q(t)$ движется линейно по биссектрисе ℓ угла, образованного серединными перпендикулярами $p(0)$ и $q(0)$ к сторонам треугольника ABC, с вершиной в центре O описанной вокруг него окружности. Ясно, что прямая FG перпендикулярна ℓ в силу осевой симметрии относительно ℓ.

Доказательство того, что прямая ℓ параллельна биссектрисе угла $\angle BAC$, абсолютно аналогично рассуждению из задачи **9**. Это завершает решение.