МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ — 1

П. В. Бибиков[1]

Содержание

1. Введение

Подавляющее большинство задач, связанных с неравенствами, сводится к решению *полиномиальных и рациональных неравенств*, т.е. неравенств, содержащих в себе многочлены или дроби. Существует простой и эффективный прием, который позволяет решать подобные задачи. Он называется *методом интервалов*, и в этом пособии мы детально обсудим его применение. Этот метод крайне важен, поскольку его различные модификации будут встречаться при решении многих других, более сложных задач, содержащих, например, показательные и логарифмические функции, а также модули, корни и тригонометрические выражения.

Даже у такого, казалось бы, простого приема, как метод интервалов, существуют свои «фишки», позволяющие упростить решение той или иной задачи, а также обеспечивающие надежность его применения. На этих двух принципах — универсальности и надежности — и должны быть основаны базовые методы решения задач.

[1]Лицей «Вторая школа»; *e-mail*: `bibikov.pv@sch2.ru`

2. Описание метода интервалов

Мы покажем. как работает метод интервалов, решив несколько модельных задач.

Пример 1. Решить неравенство $\frac{1}{x} \geqslant 1$.

Первая ошибка, которую часто допускают школьники, решая рациональные неравенства, заключается в следующем. Они выписывают ОДЗ (в нашем случае $x \neq 0$), а затем домножают обе части неравенства на наименьший общий знаменатель, сводя задачу к неравенству полиномиальному (т.е. к многочлену). Получается система

$$\begin{cases} 1 \geqslant x \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Эта система и дает нам ответ. Однако он *неверен*. Почему? Ведь ОДЗ учтено!

Дело в том, что *нельзя домножать неравенство на переменную величину*. Потому что неравенство сохраняет знак при умножении на положительное число и меняет знак при умножении на отрицательное число. Но мы умножаем неравенство на *переменную величину* x. И при каких-то значениях x (например, при $x = 2$) эта величина будет положительной, а при других x (например, при $x = -1$) она будет отрицательной. В результате совершенно непонятно, что делать со знаком нашего неравенства: то ли менять, то ли не менять. Поскольку при домножении на знаменатель знак неравенства не изменился, то мы тем самым неявно наложили на x условие $x > 0$, полностью проигнорировав случай $x < 0$, который из нашего рассмотрения выпадает.

Разумеется, иногда бывают ситуации, когда домножение даже на переменный знаменатель возможно. Это происходит тогда, когда *знак знаменателя постоянен*. Например, можно умножить неравенство на $x^2 + 1$, поскольку это выражение всегда больше 0. Однако, как правило, на знаменатели домножать нельзя, поскольку они могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. И что же делать тогда?..

Часто школьники, не знакомые с методом интервалов, предлагают просто разобрать два случая: когда знаменатель больше нуля и когда он меньше нуля. Но здесь важно понимать, что при увеличении количества дробей в примере, а также при усложнении самих знаменателей, число вариантов возрастает очень быстро. Например, перебор знаков в произведении $(x-1)(x+1)(x-2)$ потребует минимум четырех случаев! Поэтому перебор вариантов (как и практически во всех алгебраических задачах) *не дает необходимой скорости и надежности*. Мы пойдем другим путем.

Для начала давайте перенесем все слагаемые в одну часть неравенства, оставив в другой части 0:

$$\frac{1}{x} - 1 \geqslant 0.$$

Почему удобно сравнивать выражение с нулем? Потому, что нам достаточно следить лишь за *знаком* выражения, а не за его численными значениями! А информацию о знаке выражения можно получить, разложив его на множители (поскольку, зная знаки сомножителей, мы сможем однозначно узнать знак всего выражения).

Итак, план действий таков: переносим все слагаемые в одну часть, приводим все к общему знаменателю и раскладываем числитель и знаменатель на множители. В результате мы получим следующее неравенство:

$$\frac{1-x}{x} \geqslant 0.$$

Заметим, что в числителе знак перед переменной x отрицательный. Это не очень-то удобно, поэтому поправим знак числителя, умножив все неравенство на -1:

$$\frac{x-1}{x} \leqslant 0.$$

Ну а теперь настало время применить метод интервалов. В чем этот метод состоит? Оказывается, что суть его скорее в геометрии, а не в алгебре! Нарисуем координатную прямую и отметим на ней *нули* числителя и знаменателя. При этом закрасим соответствующий нуль черным цветом, если он входит в ответ, и белым, если не входит. В частности, все нули знаменателя всегда белые. (Вот вам и учет ОДЗ! Оказывается, заранее его выписывать совершенно не нужно!)

Теперь запустим по нашей прямой *змейку*. Змейка — это кривая, являющаяся графической иллюстрацией знака нашего выражения, которое мы сравниваем с 0. А именно, если змейка на каком-то интервале *выше* нашей координатной прямой, это означает, что на данном интервале знак выражения *положителен*, а если *ниже*, то *отрицателен*.

Запускается змейка *всегда справа налево*. Почему? Дело в том, что правая часть нашей координатной прямой — это большие положительные x. При таких x легко контролировать знак выражения. А именно, если сделать так, чтобы знаки коэффициентов при x во всех скобках были бы положительны (вот почему мы домножили неравенство на -1), то очевидно, что и числитель, и знаменатель при больших x также будут положительны. А раз так, то и все выражение положительно! Значит, змейка идет *сверху*.

Ведя змейку налево, мы встретим первый нуль, т.е. отмеченную точку (в нашем случае это точка 1). Ясно, что если $x > 1$, то и числитель, и знаменатель будут положительны (поэтому змейка подошла к точке 1 сверху). Но если x будет чуть-чуть меньше 1, то числитель станет отрицательным, в то время как знаменатель все еще будет положительным. Значит, знак всего выражения поменяется, и змейка должна уйти вниз, перейдя за точку 1! Мы будем говорить, что *змейка глотает точку 1*.

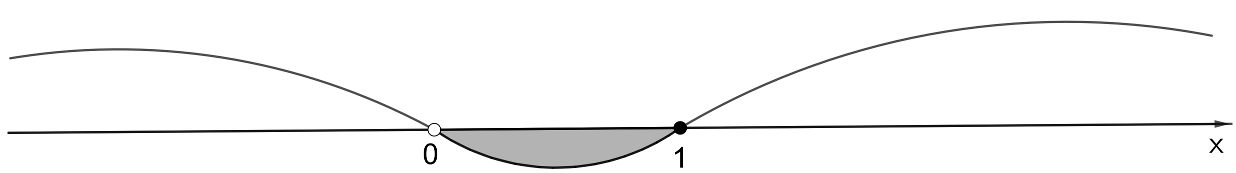


Рис. 1.

Абсолютно аналогично змейка проглотит и точку 0. Нам осталось только заштриховать ту область, на которой змейка ниже координатной оси, поскольку нам нужен знак $\leqslant$ согласно нашему неравенству, и просто записать ответ, глядя на рис. 1: $0 < x \leqslant 1$. Вот и все!

Ответ: $0 < x \leqslant 1$.

Разберем более сложный пример.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x}{1-x} < x - 6.$$

Начало решения полностью повторяет решение предыдущего примера: мы не домножаем на знаменатель, поскольку он может быть отрицательным, а переносим все слагаемые в левую часть и приводим выражение к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 - 6x + 6}{1 - x} < 0.$$

Что делать дальше? Во-первых, нужно не забыть поменять знак в знаменателе, потому что нам важно, чтобы коэффициент перед x был бы положительным. Домножая неравенство на -1, получаем

$$\frac{x^2 - 6x + 6}{x - 1} > 0.$$

Далее, нам нужно поймать точки, в которых числитель и знаменатель дроби меняют знак. Точки смены знака — это нули числителя и знаменателя. Именно эти точки мы затем отметим на координатной прямой и запустим через них змейку. Но если со знаменателем все понятно (он обращается в 0 в точке 1), то числитель представляет собой квадратный трехчлен.

В таких случаях очень важно не просто найти корни квадратного трехчлена (их, кстати говоря, иногда можно и угадать), но и обязательно *разложить выражение квадратный трехчлен на множители*. Почему нам важно разложение? Дело в том, что именно за *линейными скобками* мы следим при применении метода интервалов. Другая важная мотивировка разложения на множители будет дана ниже.

Поскольку у нашего квадратного трехчлена «плохие» корни, удобно оформить решение так. Следующий переход запишем таким образом:

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x - 1} > 0, \quad \text{где } x_1 = 3 - \sqrt{3^2 - 6} = 3 - \sqrt{3} \text{ и } x_2 = 3 + \sqrt{3^2 - 6} = 3 + \sqrt{3}.$$

Т.е. мы в дальнейшем будем использовать обозначения x_1 и x_2 для записи громоздких корней $3 \pm \sqrt{3}$.

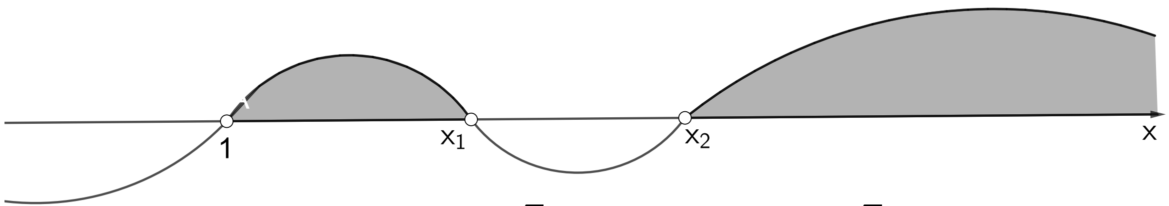
Плохие корни порождают еще одну сложность при использовании метода интервалов. Нам важно *в правильном порядке* расположить нули числителя и знаменателя на координатной прямой. Понятно, что $x_2 = 3 + \sqrt{3} > 1$. Теперь давайте сравним $x_1 = 3 - \sqrt{3}$ и 1. В таких случаях нужно *всегда* кратко пояснять, какое из чисел больше. Сделать это можно так:

$$\sqrt{3} < 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 - \sqrt{3} > 3 - 2 = 1.$$

Приведем еще раз всю цепочку преобразований с самого начала:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x} &< x - 6 \Leftrightarrow \\
\frac{x}{1-x} - (x - 6) &< 0 \Leftrightarrow \\
\frac{x - (1-x)(x-6)}{1-x} &< 0 \Leftrightarrow \\
\frac{x^2 - 6x + 6}{1 - x} &< 0 \Leftrightarrow \\
\frac{x^2 - 6x + 6}{x - 1} &> 0 \Leftrightarrow \\
\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x - 1} &> 0, \quad \text{где } x_1 = 3 - \sqrt{3^2 - 6} = 3 - \sqrt{3} \text{ и } x_2 = 3 + \sqrt{3^2 - 6} = 3 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Теперь можно рисовать координатную прямую и запускать змейку (см. рис. 2).



(т.к. $\sqrt{3} < 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 - \sqrt{3} > 3 - 2 = 1$).

Рис. 2.

Ответ: $1 < x < 3 - \sqrt{3}$, $x > 3 + \sqrt{3}$.

Разумеется, в дальнейшем некоторые преобразования можно делать быстрее. Однако на первых порах знакомства с методом интервалов лучше не перепрыгивать через логические шаги, а выполнять их последовательно и аккуратно.

На самом деле не все так просто. В методе интервалов (как и в любой другой теме) есть свои подводные камни. Отметим два наиболее опасных.

Первая опасность. С ней мы уже встречались. Очень важно при приведении дробей к общему знаменателю при необходимости менять знак перед старшими коэффициентами переменной, чтобы сделать их *положительными*. Для этого *все неравенство* нужно умножить на -1, что приведет к изменению знака неравенства. Повторим, что делается это для того, чтобы змейка всегда запускалась сверху (т.е. при больших значениях переменной каждая скобка в нашем выражении была бы положительной). Если забыть изменить знак, то змейка должна будет пойти снизу, а отслеживать каждый раз такие ситуации очень неудобно. Поэтому для обеспечения надежности важно приводить наше выражение к такому стандартному виду, чтобы коэффициенты перед всеми переменными в линейных скобках были бы положительными.

Вторая опасность. Вторая опасность в методе интервалов намного сложнее. Более того, зная об этой опасности, составители вариантов олимпиад и ЕГЭ специально подбирают задачи так, чтобы она появилась. Поясним эту опасность на следующем примере.

Пример 3. Решить неравенство

$$x \leqslant 3 - \frac{1}{x-1}.$$

Действуя по нашей схеме, описанной выше, мы в конце концов приведем неравенство к виду

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0.$$

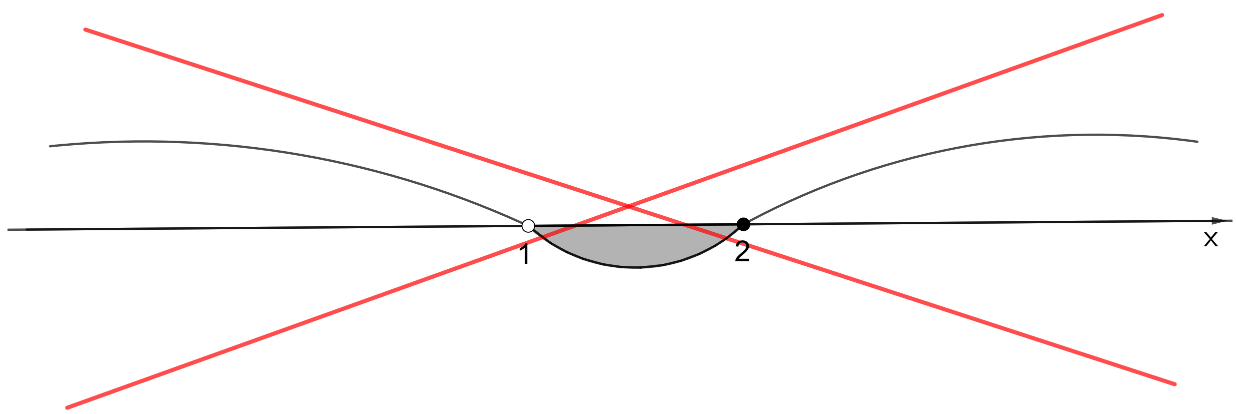


Рис. 3.

Запустив змейку как обычно (см. рис. 3), мы получим ответ $1 < x \leqslant 2$, который оказывается *неверным* (например, точка $x = 1{,}5$ не должна входить в ответ, а точка $x = 0$, наоборот, должна). Давайте посмотрим, чем отличаются неравенства

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x-1} > 0.$$

Видно, что в первом случае скобка содержит *квадрат*. Видимо, в этом все дело...

Как влияет наличие квадрата на поведение нашей змейки? Видно, что при проходе через точку $x = 2$ змейка *не должна менять знак*, потому что скобка, стоящая в квадрате, не меняет знака! Поэтому точка $x = 2$ — *опасная*, и змейке ее нельзя глотать. В таком случае будем говорить, что змейка *кусает* опасную точку.

Чтобы всякий раз не думать, глотать точку или кусать, полезно перед тем, как мы запускаем змейку, отметить все опасные точки, например, восклицательным знаком (см. рис. 4). Тогда змейка точно их не проглотит, поскольку будет *видеть*, что точки эти опасные!

А какие точки являются опасными? Когда знак выражения не меняется при проходе через эту точку? Ответ такой: точка является опасной, если скобка, которая ее содержит, входит в наше выражение *в четной степени*. Именно в этом случае знак такой скобки не будет меняться. Например, точка 2 в выражении

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$$

опасная, поскольку она входит в степени $1 - 1 = 0$. Хотя, конечно же, чаще всего встречаются опасные точки степени 2. Напротив, скобки, стоящие в нечетных степенях 1, 3, ..., опасными не являются, и соответствующие точки змейкой проглатываются как обычно.

Вот почему важно *раскладывать числитель и знаменатель на множители*, а не просто искать их корни! Если не написать выражение $(x-2)^2$, мы *не увидим* четной степени и не поймем, что точка $x = 2$ — опасная! А именно на этом часто ловят школьников в олимпиадных задачах и примерах ЕГЭ.

Также подчеркнем, что именно *разложение на множители* является конечной целью при решении задачи методом интервалов. Поэтому важно прежде всего искать именно разложение на множители, в том числе с помощью формул сокращенного умножения. Часто это позволяет существенно упростить решение по сравнению со стандартной схемой «перенесем все в одну часть и приведем к общему знаменателю».

Теперь мы можем нарисовать правильную картинку (см. рис. 4) для метода интервалов в нашем неравенстве

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0.$$

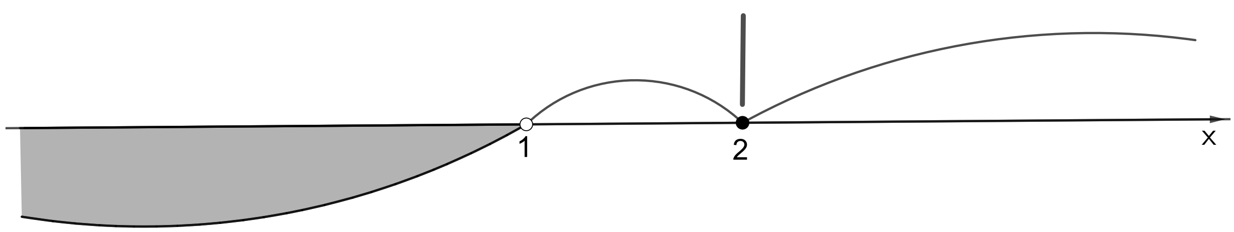


Рис. 4.

Остается только лишь выписать ответ. И вот здесь нас подстерегает еще одна опасность. Хочется выписать ответ $x < 1$, поскольку именно он и закрашен на рисунке. Но мы забыли опасную точку $x = 2$. Ведь она черная и потому тоже должна входить в ответ! Однако стоит эта точка *одна*, поэтому заметить ее, когда мы собираем ответ, непросто! Такие точки называются *изолированными*, и чаще всего именно о них забывают при решении задачи. Поэтому нужно помнить, что точка опасна не только потому, что ее нужно укусить, но еще и потому, что, если она черная, ее нужно не забыть включить в ответ! Напротив, если опасная точка белая, то ее в ответ включать не нужно. Такие точки называются *выколотыми*.

Ответ: $x < 1$, $x = 2$.

В заключение обратим внимание на еще одну тонкость, о которой часто не говорят в школе. *Удобно* записывать ответ с помощью неравенств; при этом в школе часто учат записывать ответ в теоретико-множественном виде, например, $x \in (-\infty; 1) \cup \{2\}$.

Формально говоря, и та, и другая записи корректны и верны. Тем не менее, удобнее использовать именно запись в виде неравенств. Почему, будет ясно из следующего раздела. Пока что стоит лишь привыкнуть к такому оформлению.

Вот, пожалуй, и все тонкости метода интервалов. Теперь еще раз дадим четкий и краткий алгоритм действий и перейдем к решению задач.

- Переносим все в одну часть, приводим к общему знаменателю.
- Раскладываем числитель и знаменатель на множители, следим, чтобы все коэффициенты при x были положительны.
- Рисуем координатную ось, отмечаем на ней нули числителя и знаменателя: белым, если он не входит в ответ, черным, если входит в ответ, восклицательным знаком сверху, если точка опасная (т.е. входит в четной степени).
- Рисуем змейку справа налево, глотая обычные точки и кусая опасные. Штрихуем ответ.
- Выписываем ответ с помощью неравенств, не забываем выколотые и изолированные точки.

3. Задачи на метод интервалов

Во всех задачах требуется решить неравенство.

1. $\dfrac{x}{x-4} < 3.$

2. $\dfrac{4}{x+3} < \dfrac{3}{x-1}.$

3. $\dfrac{x^2-5x+4}{5-x} > 0.$

4. $\dfrac{1}{3-2x} \leqslant 1.$

5. $\dfrac{1}{x-96} \leqslant \dfrac{x}{x-96}.$

6. $\dfrac{x-3}{3x} \geqslant \dfrac{1}{2}.$

7. $\dfrac{2x}{x+1} < 1.$

8. $\dfrac{3x-1}{2x+5} > 3.$

9. $\dfrac{2x-1}{3+5} \leqslant -2.$

10. $\dfrac{7x+4}{3-2x} \geqslant 2.$

11. $\dfrac{5-6x}{3x+4} < 1.$

12. $\dfrac{x}{2x-1} < \dfrac{1}{3}.$

13. $\dfrac{2-3x}{x+2} \leqslant 5.$

14. $\dfrac{(x^2-9)(1-x)}{x^2+2x+1} \geqslant 0.$

15. $\dfrac{x^2+x-6}{(9-x)^2} \leqslant 0.$

16. $\dfrac{x^2+6x+9}{5+4x-x^2} \geqslant 0.$

17. $\dfrac{x^2+8x+7}{4x^2+4x+1} < 0.$

18. $\dfrac{x^2(6-x)^3(x+4)}{(x+7)^5} \geqslant 0.$

19. $\dfrac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5} \leqslant 0.$

20. $x \leqslant \dfrac{2}{x+1}.$

21. $4x+7 \leqslant \dfrac{2}{x}.$

22. $x+3+\dfrac{4}{x-1} < 0.$

23. $(x^2-4x)^2 \geqslant 16.$

24. $\dfrac{x+7}{x-2} > x-1.$

25. $x \leqslant \dfrac{8x-2}{x+5}$.

26. $\dfrac{30x-9}{x-2} \geqslant 25(x+2)$.

27. $3-x \geqslant \dfrac{1}{2-x}$.

28. $\dfrac{x}{x-1} > x+1$.

29. $\dfrac{4x+1}{4(2-x)} < x+2$.

30. $\dfrac{x-7}{x+3} < x+1$.

31. $\dfrac{x+7}{x+2} > x-1$.

32. $x+\dfrac{1}{x+1} \leqslant -2$.

33. $\dfrac{8-x}{x-10} \leqslant \dfrac{2}{2-x}$.

34. $\dfrac{2x-3}{4x-1} \geqslant \dfrac{x-2}{x+2}$.

35. $\dfrac{x+1}{1-x}+\dfrac{x-1}{x} < 2$.

36. $\dfrac{2x-7}{x-3} > \dfrac{9}{5-x}$.

37. $\dfrac{x}{x-1} \leqslant \dfrac{x-2}{x}$.

38. $\dfrac{2x}{x^2-4} \leqslant \dfrac{1}{x+1}$.

39. $\dfrac{2x-3}{x} \geqslant \dfrac{3-2x}{2x^2-4x}$.

40. $\dfrac{3}{x-2}+2 < \dfrac{3}{x+4}$.

41. $\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x-2} \geqslant \dfrac{1}{x-3}$.

42. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{x+2}$.

43. $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{3}{x+2}$.

44. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x} > \dfrac{3}{x-1}$.

45. $\dfrac{6}{x-1} \leqslant \dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$.

46. $\dfrac{21}{x+1} < \dfrac{16}{x-2}-\dfrac{6}{x}$.

47. $\dfrac{7}{x^2-5x+6}+\dfrac{9}{x-3}+1 \leqslant 0$.

48. $\dfrac{1}{x^2+8x-9} \geqslant \dfrac{1}{3x^2-5x+2}$.

49. $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-2 \leqslant \dfrac{4}{x-1}$.

50. $\dfrac{1}{x^2-x}+1 > \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$.

51. $\dfrac{4x-1}{x^2+x+1} < 1$.

52. $\dfrac{1}{x^2-4x+3} > \dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}$.

53. $x+\dfrac{4x^2+5x}{x^2-x-6} > \dfrac{9}{5x-15}+\dfrac{5x+1}{5x+10}$.

54. $\dfrac{x^2+x+1}{x-2} > 1-x$.

55. $\dfrac{3x-5}{x^2+4x-5} \leqslant 0{,}5$.

56. $\dfrac{2x+3}{12-x-x^2}+0{,}5 \geqslant 0$.

57. $\dfrac{5-2x}{3x^2-2x-16} < 1$.

58. $\dfrac{5-4x}{3x^2-x-4} < 4$.

59. $\dfrac{7x-16}{x^2-7x+12} \geqslant -1$.

60. $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1} < \dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$.

61. $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3} \leqslant \dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$.

62. $\dfrac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9} >$
$> \dfrac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$.

63. $\dfrac{(x^2-6x+9)(3x^2-2x-1)}{5-x} \leqslant$
$\leqslant \dfrac{(x^2-6x+9)(2+2x-4x^2)}{5-x}$.

64. $\dfrac{4x^2-1}{x^2-3x+2} > 1-2x.$

65. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x+4} \leqslant x+3.$

66. $\dfrac{1}{1+1/x} \leqslant 2.$

67. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}} \geqslant 0.$

68. $\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)^2 > 0.$

69. $\dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{6}{x-2} + 9 > 0.$

70. $(x-3)^2 + \dfrac{1}{x^2-6x+9} > 2.$

71. $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{8} - \dfrac{15}{88-32x}\right)^2 \geqslant 1.$

72. $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+7x+14} \leqslant 0.$

73. $\dfrac{x^2-3x-4}{x+1} \leqslant 1.$

74. $\dfrac{10+3x-x^2}{x^2-3x+2} \leqslant 1.$

75. $\dfrac{5x+1}{(x+2)(x-3)} \geqslant 1 + \dfrac{16}{x-3}.$

76. $\dfrac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \geqslant -1.$

4. Системы неравенств

При решении более трудных задач (включающих в себя модули, корни, логарифмы и т.д.) часто возникает необходимость решить не одно рациональное неравенство, а сразу несколько. Иначе говоря, нужно решить *систему* или *совокупность рациональных неравенств*. Здесь мы покажем пример оформления решения системы неравенств, обеспечивающий наибольшую надежность на практике.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geqslant 0. \end{cases}$$

Мы приведем сначала краткое решение этой задачи, а потом на его основе обсудим основные принципы решения систем неравенств методом интервалов.

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-3) > 0 \\ (x-4)(x-7) \geqslant 0. \end{cases}$$

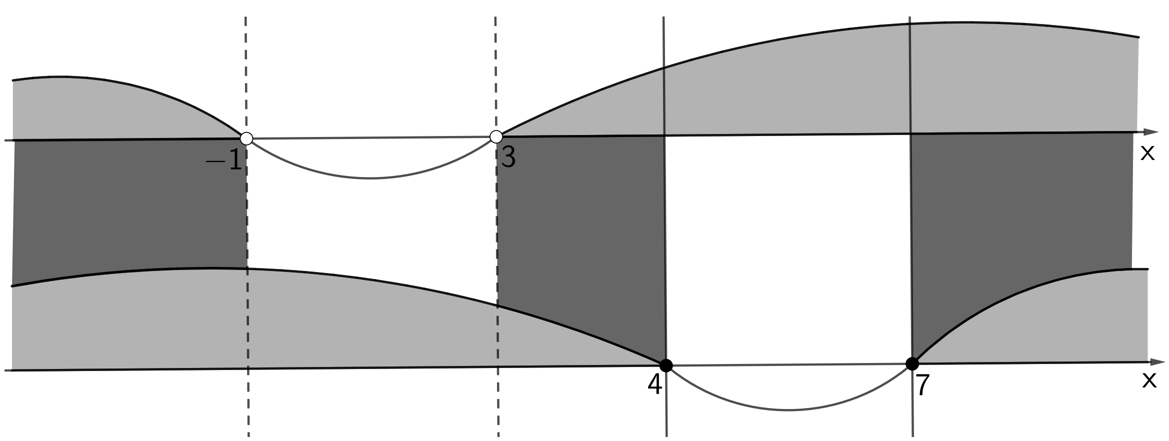


Рис. 5.

Ответ: $x < -1$, $3 < x \leqslant 4$, $x \geqslant 7$.

Теперь разберемся, что мы сделали и как получили решение.

Заметим, что мы решаем именно всю систему целиком, а не отдельно взятые неравенства. Это сильно экономит время, поскольку мы работаем сразу со всеми выражениями, фигурирующими в условии задачи. Кроме того, мы *не торопимся* выписывать ответ в одном отдельном неравенстве, если оно оказалось проще других. Просто потому, что *все* неравенства мы решим *одновременно* методом интервалов на картинках, а численная запись ответа лишь в *одном* из них никак нам не поможет.

Все алгебраические преобразования для нас уже стандартны: мы приводим неравенства к стандартному виду, перенося все слагаемые в одну часть (в наших неравенствах они и так в одной части) и раскладывая получившиеся выражения на множители.

А вот при запуске змеек есть ряд хитростей. Во-первых, у нас возникает несколько змеек: каждая змейка соответствует своему неравенству (именно в таком порядке их и нужно рисовать). Во-вторых, отмечая точки на каждой из прямых, мы должны учитывать порядок их расположения. Иначе говоря, точка -1 на верхней змейке должна лежать левее точки 4 на нижней змейке. Напомним, что при возникновении иррациональных ответов необходимо кратко пояснять, почему Вы располагаете точки именно так, а не иначе.

Ну и наконец, последний шаг. Как мы пересечем ответы, полученные на каждой змейке? Удобнее всего сделать так. Проведем через все точки на нашей картинке вертикальные прямые: пунктирные, если точка, через которую проводится прямая, белая, и сплошную, если точка черная (см. рис. 5). Эти прямые разобьют область между змейками (горизонтальную полоску) на несколько частей (в нашем случае этих частей пять). А теперь будем двигаться по этим частям слева направо и закрашивать те части, у которых заштрихованы *и верх, и низ* (т.е. соответствующие точки входят в ответ *обоих неравенств*). Закрашенные области — это в точности ответ в нашей системе!

Что делать, если бы мы решали совокупность? Единственное отличие заключается на последнем шаге: красить нужно те части, у которых заштрихованы *или верх, или низ* (т.е. соответствующие точки входят в ответ *хотя бы одного неравенства*).

Разумеется, возможны ситуации, когда необходимо решить и систему, и совокупность (ниже такие примеры возникнут). В таком случае нужно быть внимательным при выборе раскраски и красить решения системы и совокупности по-разному (например, используя штриховку или цветные карандаши).

В заключение этого раздела покажем еще один тип задач на метод интервалов, в котором возникает именно совокупность неравенств (хотя может возникнуть и система). Этот тип задач также покажет, почему ответ полезно писать именно в виде неравенств, а не с помощью теоретико-множественного языка.

Пример 5. Решить неравенство

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 \geqslant 0.$$

Видно, что в этом примере перед тем, как раскладывать что-либо на множители, необходимо сделать замену переменной, чтобы свести задачу к квадратному неравенству.

$$\begin{aligned} &(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow \\ &\qquad t^2 - 5t + 4 \geqslant 0 \quad (\text{где } t = 2x^2 + 3x - 2) \Leftrightarrow \\ &\qquad (t-1)(t-4) \geqslant 0. \end{aligned}$$

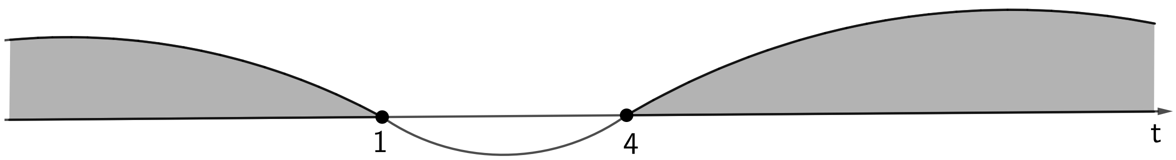


Рис. 6.

Получаем, что либо $t \leqslant 1$, либо $t \geqslant 4$. Вернемся к исходным переменным.

$$\left[\begin{aligned}&t \leqslant 1\\&t \geqslant 4\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned}&2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0\\&2x^2 + 3x - 5 \geqslant 0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned}&(x+2)\Big(x - \frac{1}{2}\Big) \leqslant 0\\&(x-1)\Big(x + \frac{5}{2}\Big) \geqslant 0.\end{aligned}\right.$$

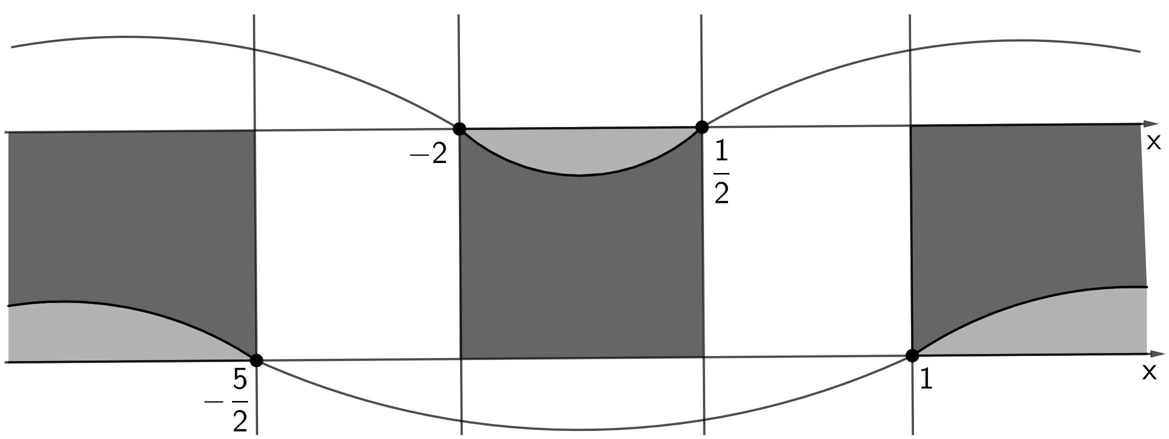


Рис. 7.

Ответ: $x \leqslant -\frac{5}{2}$, $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, $x \geqslant 1$.

В чем оказалось преимущество записи ответа в виде неравенств по сравнению с теоретико-множественным языком? А в том, что после получения *промежуточного ответа* для новой переменной t задача еще не решена! Неравенство осталось (и даже не одно, а целая совокупность), оно лишь упростилось до более удобного вида. У нас было неравенство, и осталось неравенство. А вот если записать промежуточный ответ в виде $t \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$, то что тогда делать со следующим шагом, когда мы возвращаемся к старой переменной x? Как вообще работать с записью вида

$$2x^2 + 3x - 1 \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)?$$

Приходится возвращаться именно к неравенствам. Спрашивается, зачем же было от них уходить?!

В заключение еще раз приведем схему действий для решения систем или совокупностей неравенств.

- Решаем всю систему целиком, а не каждое неравенство отдельно;
- каждое из неравенств приводим к стандартному виду, перенося все слагаемые в одну сторону, приводя к общему знаменателю и раскладывая на множители;
- не выписываем ответ для каждого неравенства отдельно;
- для каждого неравенства рисуем свою змейку, при этом положения чисел на разных змейках должны быть согласованы;
- проводим вертикальные прямые через отмеченные на змейках точки; пунктирные прямые, если точки белые, сплошные — если черные;
- штрихуем области между змейками, которые заштрихованы на всех змейках системы (если решаем систему) или хотя бы на одной змейке (если решаем совокупность).

77. $\begin{cases} 2(x-1) - 3(x-4) > x + 5 \\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4} \geqslant 0. \end{cases}$

78. $\begin{cases} x^2 + 3x + 2 > 0 \\ \dfrac{x}{x+1} \leqslant 0. \end{cases}$

79. $\begin{cases} 4x^2 > 1 \\ -2x^2 + 5x - 3 > 0. \end{cases}$

80. $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geqslant 0 \\ x^2 - 4x < 0. \end{cases}$

81. $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \leqslant 0. \end{cases}$

82. $\begin{cases} \dfrac{2-x}{x+1} \geqslant 1 \\ \dfrac{2-x}{x+1} \leqslant 2. \end{cases}$

83. $\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} > 1 \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} \leqslant 2. \end{cases}$

84. $\begin{cases} x^2 \leqslant 4 \\ x^2 - x - 6 \geqslant 0. \end{cases}$

85. $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geqslant 0 \\ x^2 + x - 6 \leqslant 0. \end{cases}$

86. $\begin{cases} x^2 - 14x + 45 < 0 \\ x^2 - 11 + 30 > 0 \\ \dfrac{2x-3}{x^2-x+2} > 0. \end{cases}$

87. $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 > 0 \\ 3x^2 - 7x - 6 < 0 \\ 6x^2 - 11x - 10 \leqslant 0. \end{cases}$

88. $\left[\begin{aligned} 3x^2-7x+4&<0\\ x^2-4&\leqslant 0.\end{aligned}\right.$

89. $\left[\begin{aligned} 4x^2+7x-15&\leqslant 0\\ 20x^2-23x-21&<0.\end{aligned}\right.$

90. $\left[\begin{aligned} x^2-6x-27&>0\\ 4x^2+31x+60&\leqslant 0.\end{aligned}\right.$

91. $\left[\begin{aligned} x^2+16x+15&\geqslant 0\\ \frac{2x-1}{x+1}&\geqslant 3.\end{aligned}\right.$

92. $\left[\begin{aligned} 9x^2-4x-5&<0\\ \frac{5x-2}{3-2x}&\leqslant 1.\end{aligned}\right.$

93. $\left[\begin{aligned} \frac{x^2}{x-1}&<0\\ \frac{x^2}{x+1}&\leqslant 0.\end{aligned}\right.$

94. $\left[\begin{aligned} \frac{3}{3-2x-x^2}&\leqslant 1\\ 11x-x^2&>28.\end{aligned}\right.$

95. $x^2+1>\dfrac{x^2-5}{x^2+2}.$

96. $\dfrac{1}{x^2-5x+7}\leqslant 5x-x^2-5.$

97. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}\geqslant\dfrac{7}{6}.$

98. $(x^2+2x)^2-3(x+1)^2\leqslant -3.$

99. $(x^2-5x+7)^2-(x-3)(x-2)\leqslant 1.$

100. $\dfrac{16}{(x+6)(x-1)}-\dfrac{20}{(x+2)(x+3)}\geqslant 1.$

101. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\geqslant 120.$

102. $3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\leqslant 4.$

103. $\left(x^2+\dfrac{16}{x^2}\right)-x-\dfrac{4}{x}\geqslant 12.$

5. Метод областей

Важной модификацией метода интервалов является так называемый *метод областей*. По сути он заключается в обобщении метода интервалов на случай функций двух переменных. Иначе говоря, вместо выражения от одной переменной x мы рассматриваем выражение, зависящее от двух переменных x и y, которые можно интерпретировать как координаты точек на плоскости. Неравенство вида $f(x, y) > 0$ задает на плоскости некоторую *область* или *набор областей*, который часто бывает полезен при изучении исходного алгебраического неравенства.

Реализация метода областей практически полностью повторяет идеологию обычного метода интервалов. Нам необходимо лишь научиться повышать размерности рассматриваемых объектов. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 6. Изобразить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$(x-y)(x^2+y)\geqslant 0.$$

Обратите внимание, что в этой задаче от нас не требуют выписывать ответ в численном виде: это просто невозможно. Вместо этого достаточно картинки, на которой будут выделены все точки, удовлетворяющие нашему неравенству. По сути, нам нужна картинка, аналогичная змейке.

Каким образом эту картинку получить? Для начала нам нужно привести наше неравенство к стандартному виду, т.е. перенести все слагаемые в левую часть и разложить полученное выражение на множители. Нам повезло: наше выражение уже приведено к стандартному виду, так что этот шаг сейчас делать не нужно. Далее, нужно отметить на координатной плоскости *нули всех скобок* (полная аналогия с методом интервалов!). Но только если в методе интервалов нуль каждой скобки — это точка, то в методе областей это кривая, т.е. целое множество точек.

Как правило — это стандартные кривые, знакомые нам из курса алгебры: прямые, параболы, гиперболы и окружности.

В нашем случае нам нужно нарисовать множества $\{x - y = 0\}$ и $\{x^2 + y = 0\}$. Ясно, что первое множество — это прямая (биссектриса первого квадранта), а второе — парабола рогами вниз с вершиной в начале координат.

Договоримся рисовать подобные множества нулей пунктирной линией, если точки этих множеств не входят в ответ, и сплошной линией, если входят. По сути это аналоги белых и черных точек соответственно. В нашем случае и прямая, и парабола должны быть нарисованы сплошными линиями (см. рис. 8). Обратите внимание, что при изображении нескольких кривых мы обязаны указать точки их пересечения — это также является частью решения. В нашем случае точки пересечения легко угадываются — это точки $(0; 0)$ и $(-1; -1)$.

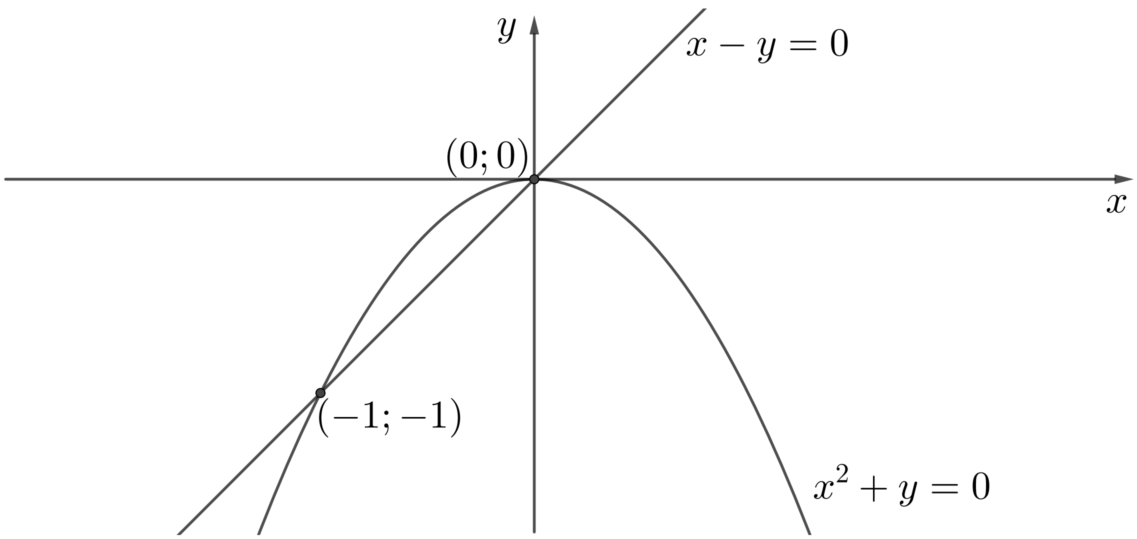


Рис. 8.

А теперь начинается самое интересное. Нам нужно запустить змейку, т.е. найти знаки, которые принимает выражение $(x - y)(x^2 + y)$ в *каждой из областей*, на которые разбили координатную плоскость множества нулей наших скобок. И здесь, в отличие от метода интервалов, есть сразу два существенных отличия.

Прежде всего, в методе интервалов мы могли привести выражение в левой части к стандартному виду, когда коэффициенты при переменной x во всех скобках были положительными, что позволяло запускать змейку всегда справа налево, ведя ее сверху. На плоскости подобного стандартного вида не существует. Как же определить знак выражения в каждой из областей?

Оказывается, достаточно узнать знак только *в одной точке* из данной области! В самом деле, *смена знака* какой-либо скобки происходит *только при переходе через множество нулей этой скобки*. Поэтому, оставаясь в данной области и не переступая через множества нулей, которые мы отметили, знак выражения меняться не будет.

Подставим, например, точку $(1; 0)$. Ясно, что тогда $(1 - 0)(1^2 + 0) = 1 > 0$, так что знак выражения $(x-y)(x^2+y)$ будет положителен *во всей области, содержащей точку* $(1; 0)$. Поэтому мы можем закрасить всю область, содержащую точку $(1; 0)$, и даже для надежности поставить в ней знак $+$, равный знаку выражения $(x - y)(x^2 + y)$ в этой области (делается это для того, чтобы, попав на первом шаге в отрицательную область, которая не войдет в ответ, мы бы не забыли знак в этой области).

Но как быть с другими областями? Если их много (в нашем случае их пять), то не проверять же пять разных точек — это очень неудобно! И здесь возникает второе отличие метода областей от метода интервалов. Для того, чтобы узнать знак выражения $(x-y)(x^2+y)$ в оставшихся областях, достаточно просто начать ходить по ним, *перешагивая* через множества нулей, ограничивающих наши области! Здесь самой змейки мы не видим, поэтому будем просто переходить в соседние области, *меняя при этом знак нашего выражения*. Почему выражение меняет знак при проходе через границу? По той же причине, по которой змейка в методе интервалов меняла знак при проходе через нуль скобки! Значит, можно пройти по всем областям, меняя знаки при каждом перешагивании через границу. В итоге, закрашивая области с положительным знаком, мы получаем рис. 9.

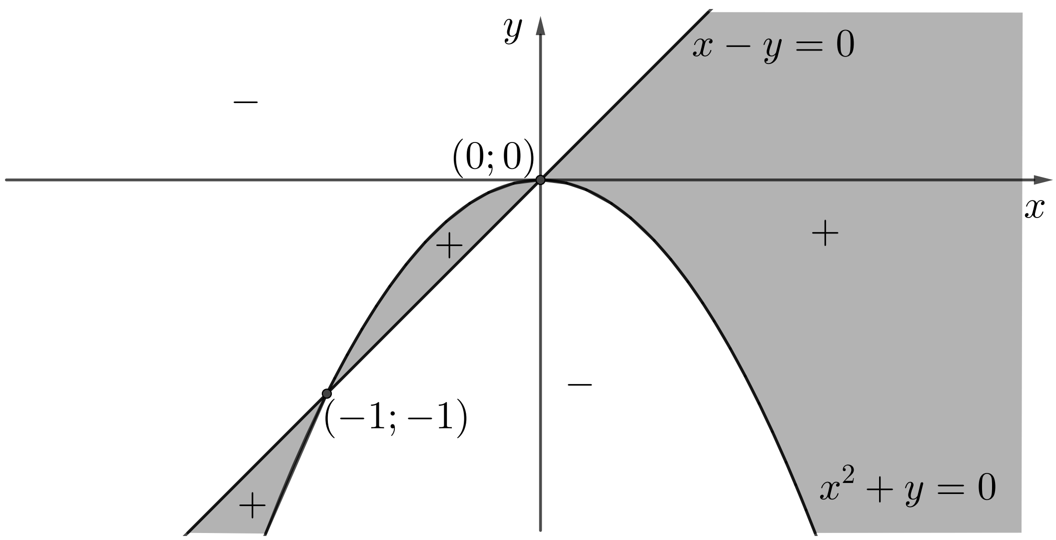


Рис. 9.

Разумеется, при реализации метода областей также есть свои тонкости. Во-первых, перешагивать через границы необходимо с осторожностью, поскольку, как и в методе интервалов, бывают *опасные границы*, при переходе через которые знак не меняется. Обычно они соответствуют выражениям вида x^2 или $|x|$. Во-вторых, может возникнуть такой вопрос. Что было бы, если бы мы обошли наши области в другом порядке? Т.е. зависит ли конечная картинка от порядка обхода областей? Несложно сообразить, что *не зависит*: знак в каждой области определен однозначно, поэтому способ его получения не влияет на сам знак.

Суммируем наши наблюдения.

- Для решения задачи методом областей сначала мы переносим все слагаемые в одну сторону и раскладываем получившееся выражение на множители;
- на координатной плоскости изображаем множества нулей каждой из скобок, которые получаются в результате разложения на множители; отмечаем на рисунке точки пересечения этих множеств;
- кривая рисуется сплошной линией, если ее точки входят в ответ, и пунктирной, если не входят; опасную кривую, соответствующую скобкам постоянного знака (например, x^2 или $|x|$) выделяем дополнительно (например, более жирно или штрихуя малую окрестность вокруг нее);
- для определения знака выражения в одной области выбираем пробную точку и считаем знак выражения в ней;
- для определения знака в остальных областях обходим их последовательно, перешагивая через границы и либо меняя знак, если мы перешагнули через обычную кривую, либо сохраняя знак, если перешагнули через опасную кривую;
- закрашиваем те области, знак выражения в которых совпадает со знаком из условия задачи.

104. $y - x^2 - x \geqslant 0.$

105. $x^2 - 5xy + 6y^2 \geqslant 0.$

106. $xy + 1 \leqslant 0.$

107. $(x+1)^2 \geqslant y^2.$

108. $y - \dfrac{x+1}{x} \leqslant 0.$

109. $(xy-2)(2x+y-1) > 0.$

110. $x^4 - 2x^2 > y^2 + 2y.$

111. $\dfrac{(x^2-y^2)(x^2+y^2-4)}{x^2+y^2} \leqslant 0.$

112. $\dfrac{(x-y)(xy+2)}{x+y} > 0.$

113. $\dfrac{2x-2y+1}{x^2+y^2-1} \geqslant 1.$

6. Примеры контрольных работ

В этом разделе приводятся примеры проверочных работ по темам, связанным с методом интервалов.

ВАРИАНТ I

1. Решить неравенство $\dfrac{3x^2+10x+3}{(3-x)^2(4-x^2)} > 0.$

2. Решить неравенство $x^2 + \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-2x+1} > \dfrac{8x-2x^2}{x-1}.$

3. Решить неравенство $\dfrac{x^2+x-2}{x} + \dfrac{2x}{x^2+x-2} \geqslant 3.$

4. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2-x-20<0 \\ x^2-2x-8>0 \\ 2x^2+x-45<0 \end{cases}.$

5. Изобразить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{(x-1)(y-x^2+3)}{y-1} \geqslant 0.$$

ВАРИАНТ II

1. Решить неравенство $\dfrac{(x-1)^2}{(5x+10)^2(-1-3x)} < 0.$

2. Решить неравенство $\dfrac{1}{2x^2+3x} \leqslant \dfrac{1}{3x-2x^3}.$

3. Решить неравенство $\dfrac{x^2+x-5}{x} + \dfrac{3x}{x^2+x-5} \leqslant -4.$

4. Решить систему неравенств $\begin{cases} 4^2-4x-3 \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x^2} \geqslant 1 \\ 3x^2-20x-7<0 \end{cases}.$

5. Изобразить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{(x+2)(y^2-x)}{y^2-1} < 0.$$