УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ — 1

П. В. Бибиков[1]

Содержание

1. Введение

Несмотря на то, что уравнения и неравенства с модулями начинают изучаться еще в 7-8 классах, задачи такого типа традиционно являются камнем преткновения для многих школьников. Причина тому проста: уравнения и неравенства с модулями являются *одной из самых сложных тем* школьного курса алгебры. Задачи, в которых фигурируют модули, сложны и разнообразны, методов решения таких задач существует очень много (в данном пособии мы выделяем *шесть* таких методов), а выбрать нужный метод зачастую нелегко. При этом школьники зачастую помнят только раскрытие модулей по случаям, что обычно крайне неудобно при решении комбинированных задач с тригонометрией, логарифмами и т.д. Кроме того, о подобных сложностях прекрасно знают составители перечневых олимпиад, поэтому, предлагая задачу с модулем на олимпиаде, они как раз и рассчитывают на то, что школьники будут просто разбирать случаи раскрытия модулей (хотя простое решение иногда может быть получено совсем по-другому и гораздо быстрее). У школьников на это уходит много сил и времени, в результате чего они, даже решив задачу правильно, уже просто не успевают справиться со многими оставшимися номерами.

Цель данного пособия — четко зафиксировать набор методов, которые могут применяться при решении простейших задач с модулями, соответствующими программе 7–8 класса (до изучения квадратных трехчленов и метода интервалов). Эти методы представлены в трех разделах: «Простейшие задачи», «Точки и кусочки» и «Линейные модули». В то же время полезно регулярно предлагать школьникам подобные задачи, чтобы освежать в памяти технику решения этих довольно непростых примеров.

[1]Лицей «Вторая школа»; *e-mail*: `bibikov.pv@sch2.ru`

2. Определение модуля и простейшие задачи

Мы начнем с аккуратного определения понятия модуля числа и различных его представлений. Для начала сформулируем четкое определение.

Определение 1. *Модулем числа* a называется величина $|a|$, равная a, если $a \geqslant 0$, и $-a$, если $a \leqslant 0$.

Это же определение часто записывают в виде формулы

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{если } a \leqslant 0. \end{cases}$$

Полезно также представлять себе *геометрическую интерпретацию модуля*. А именно, рассмотрим координатную прямую и отметим на ней точку 0 и точку a. Тогда модуль числа a — это длина отрезка с концами в точках 0 и a. Аналогично, модуль $|b-c|$ — это длина отрезка с концами в точках b и c (см. рис. 1).

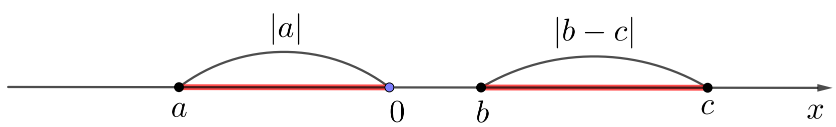

Рис. 1.

Вроде бы понятие модуля не вызывает серьезных проблем. Ведь совершенно ясно, как посчитать модуль того или иного *конкретного числа*: $|3| = 3$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$, и т.д. Какие же могут быть проблемы при изучении такого простого понятия?

На самом деле проблемы есть, и очень серьезные. Основную проблему можно сформулировать так. Да, мы знаем, чему равен модуль *конкретного числа*. Но мы *не знаем*, чему равен модуль *неизвестного числа* x! Иначе говоря, если мы решаем уравнение, содержащее выражения вида $|x|$ (т.е. под модулем стоит неизвестное число), то мы не можем сразу сказать, чему равно это выражение! В этом и заключается главная сложность при работе с модулями.

Как эту сложность преодолеть? Оказывается, что способов сделать это довольно много. Сейчас мы рассмотрим три наиболее простых способа (соответствующих именно программе 7-го класса), а в дальнейшем поговорим еще о нескольких. При этом надо сказать, что выбрать подходящий способ для избавления от модулей не так легко (поскольку их много). С другой стороны, выбрав нерациональный способ, можно очень сильно усложнить себе жизнь, поскольку объем вычислений многократно увеличится. Именно поэтому модули традиционно считаются трудной темой, требующей для своего освоения большого количества времени и сил.

Первый способ избавления от модулей связан с наиболее простыми задачами и уравнениями. Для грамотного их решения потребуется не столько формальное определение модуля, сколько его геометрическая интерпретация. Напомним, что с точки зрения геометрии модуль числа — это расстояние от соответствующей точки на координатной прямой до 0.

Пример 1. Решить уравнение $|x| = 1$.

Это простейшее уравнение с модулем, и очень часто задачи удается свести к решению нескольких таких уравнений (или неравенств, которые будут рассмотрены ниже). Это уравнение можно решить, рассуждая двумя способами: алгебраически и геометрически. Мы покажем оба способа, чтобы Вы могли выбрать тот, который удобен Вам. Однако стоит иметь в виду, что при решении *неравенств* удобно использовать *только геометрический способ*!

Способ 1 (алгебраический). Вспомним, что модуль числа — это число без знака, т.е. модуль просто убирает перед числом знак $-$. Предположим, что мы взяли неизвестное число x, убрали перед ним знак $-$ (если он был), и получили 1. Чему могло быть равно x? Очевидно, что 1 или -1! Ибо модуль числа не видит лишь его знак, поэтому только информацию о знаке мы должны восстановить. Но знака только два — плюс и минус, соответственно оба они подходят.

Способ 2 (геометрический). Вспомним, что $|x|$ — это расстояние от точки x до 0. Нам известно, что $|x| = 1$, т.е. точка x удалена от 0 на расстояние 1. Что же это за точка? Очевидно, что либо 1, либо -1 в зависимости от того, в какую сторону (положительную или отрицательную) мы откладываем отрезок длины 1. Важно не забыть, что отрезок можно откладывать от точки 0 в *две* стороны, и не терять второго ответа со знаком $-$.

Ответ: $x = \pm 1$.

Рассмотрим пример посложнее.

Пример 2. Решить неравенство $|x| < 1$.

Для решения такого неравенства очень важно хорошо представлять себе геометрический смысл модуля, поскольку именно он лучше всего позволяет справиться с этим примером. Еще раз напомним, что $|x|$ — это расстояние от точки x до 0. Нам известно, что это расстояние меньше 1. Вопрос: где могут располагаться точки, удаленные от 0 на расстояние, меньшее, чем 1? Ответ: на интервале $(-1; 1)$ (см. рис. 2).

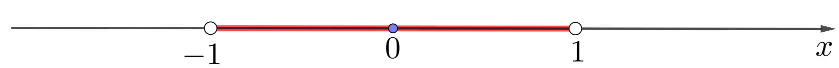

Рис. 2.

Ничего большего здесь пояснять не нужно, картинка является полным и совершенно строгим обоснованием ответа. Более того, именно эта картинка и должна возникать в голове всякий раз, когда задача с модулями сводится к простейшим неравенствам наподобие того, что у нас только что возникло.

Ответ: $-1 < x < 1$.

Пример 3. Решить неравенство $|x| \geqslant 1$.

Для решения этой задачи картинка требуется немного другой: нам нужны точки, далеко расположенные от 0 (т.е. расположенные дальше, чем точки ± 1). Поэтому здесь ответом будут два луча (см. рис. 3).

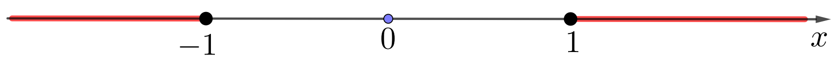

Рис. 3.

Важно следить за включением или невключением концов лучей или промежутков в ответ: это зависит от того, строгое или нестрогое неравенство у нас рассматривается. На картинке это легче всего отображать так: рисовать белую точку, если она не входит в ответ (это обычно соответствует строгому неравенству $<$ или $>$), и черную точку, если она входит в ответ (здесь обычно возникают нестрогие неравенства $\leqslant$ или $\geqslant$).

Ответ: $x \leqslant -1$, $x \geqslant 1$.

1. $|2x - 4| = 1$.

2. $|3 - |x - 2|| < 1$.

3. $|x - 7| = 4$.

4. $||x| - 2| = 1$.

5. $1 < |2x - 5| \leqslant 3$.

6. $||4 - x| - x| = 1$.

3. Точки и кусочки

Геометрический способ решения уравнений и неравенств, разобранный в предыдущем разделе, безусловно, хорошо справляется с простейшими уравнениями и неравенствами вида $|x| = a$, $|x| < a$ или $|x| > a$. Но что делать, если в задаче сразу несколько модулей? Ведь, решая простейшие уравнения и неравенства, мы существенно использовали тот факт, что модуль один, а в правой части стоит константа. Как быть, если наша задача более сложная?

Сейчас мы рассмотрим два примера. Первый пример содержит один модуль и может быть решен с использованием алгебраического определения модуля. Во втором примере модулей будет больше, поэтому наши рассуждения нужно будет модифицировать.

Пример 4. Решить неравенство $|x-1| > \dfrac{3}{2} - 2x$.

По своему внешнему виду этот пример похож на простейшее неравенство $|x-1| > \dfrac{3}{2}$, которое мы можем решить, пользуясь геометрическим смыслом модуля (см. предыдущий раздел). Однако справа стоит не число, а выражение, содержащее x. И хотя можно обобщить снятие модуля в простейшем неравенстве $|x| > a$ на случай, когда справа вместо a стоит переменная величина, логически это требует определенных усилий. Мы вернемся к этой идее позднее, когда уже освоим работу с модулями, а пока что попробуем решить наше неравенство, используя определение модуля.

Как мы уже отмечали выше, проблема заключается в том, что мы не знаем, чему равно выражение $|x-1|$: оно может равняться $x-1$ (например, при $x=2$) или $-(x-1)$ (например, при $x=0$). Какой из этих двух случаев выбрать? Наверное, поскольку возможны оба случая, нужно рассмотреть *и тот, и другой.* В каком из случаев $|x-1| = x-1$ (иначе говоря, когда *модуль будет раскрыт со знаком* $+$)? Согласно определению модуля, это произойдет, когда подмодульное выражение $x-1$ неотрицательно, т.е. когда $x-1 \geqslant 0$. Значит, если $x-1 \geqslant 0$, то наше неравенство приобретает следующий вид: $x-1 > \dfrac{3}{2} - 2x$. Оформляется это следующим образом:

$$1. \quad \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-1 > \dfrac{3}{2} - 2x \end{cases}$$

Полезно нумеровать случаи, которые мы разбираем, чтобы впоследствии не забыть собрать ответы во всех случаях воедино. Решить эту систему не представляет труда. Единственное, что стоит помнить — это то, что мы решаем именно *систему неравенств*, т.е. важно решать именно два неравенства вместе, а не по отдельности. Почему — будет объяснено чуть ниже.

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-1 > \dfrac{3}{2} - 2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x > \dfrac{5}{6} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x \geqslant 1}.$$

Осталось разобрать второй случай, когда модуль $|x-1|$ раскрывается со знаком $-$.

$$2. \quad \begin{cases} x-1 \leqslant 0 \\ -(x-1) > \dfrac{3}{2} - 2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 1 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1}.$$

Полезно обводить в рамочку ответы, полученные при разборе разных случаев: это поможет не потерять их, когда мы будем выписывать окончательный ответ.

Обратите внимание, что «граничная точка» $x = 1$ включается в *оба случая.* Это не является логической ошибкой, а скорее наоборот, является косвенной проверкой правильности полученных ответов. А именно, если точка $x=1$ вошла в ответ в первом случае, то она *обязана* войти в ответ и во втором случае (ведь при $x=1$ знак раскрытия модуля $|x-1|$ не важен, поскольку в этой точке $|x-1| = 0$). Как видно, в нашем решении именно это и произошло; если бы такого не случилось, то можно было бы с уверенностью утверждать, что в решении есть ошибка.

Таким образом, из решения систем, возникающих в первом и во втором случаях, мы получаем, что либо $x \geqslant 1$, либо $\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1$. Осталось не забыть *«склеить» эти ответы в один* (иначе говоря, объединить полученные промежутки для переменной x). Заметьте, что часто склейка происходит по точке, в которой модуль обращается в 0,что еще раз показывает важность включения этой точки в рассмотрение обоих случаев.

Ответ: $x > \dfrac{1}{2}$.

Следует отметить следующую ошибку, которая часто встречается у школьников, начинающих изучать модули. Говорят следующее: раскроем модуль $|x-1|$ или со знаком $+$, или со знаком $-$, ведь возможны оба случая раскрытия модулей. Таким образом, пишется следующий переход:

$$|x-1| > \frac{3}{2} - 2x \quad \boxed{\Leftrightarrow} \quad \left[\begin{aligned} x-1 &> \frac{3}{2} - 2x \\ -(x-1) &> \frac{3}{2} - 2x \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} x &> \frac{5}{6} \\ x &> \frac{1}{2} \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}.$$

Вроде бы все хорошо, ответ также получается верным. Однако первый переход в этом решении (обведенный в рамочку, когда мы переходим от неравенства с модулем к совокупности неравенств) *логически неверен.* Чтобы понять это, рассмотрим другой пример.

Пример 5. Решить неравенство $|x-1| < \dfrac{3}{2} - 2x$.

Вначале приведем аккуратное и строгое решение с раскрытием модулей по случаям.

$$1. \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-1 < \dfrac{3}{2} - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x < \dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing.$$

$$2. \begin{cases} x-1 \leqslant 0 \\ -(x-1) < \dfrac{3}{2} - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 1 \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \boxed{x < \frac{1}{2}}.$$

Ответ: $x < \dfrac{1}{2}$.

Обратите внимание, что первый случай привел к пустому множеству решений. Напротив, бывают ситуации, когда один из случаев дает бесконечное множество решений. Такие ситуации, непривычные при решении обычных линейных уравнений и неравенств, часто возникают при решении неравенств с модулями, так что стоит морально быть к ним готовым и не переживать, что где-то допущена ошибка.

Теперь попробуем совершить тот (неверный!) переход, который вроде привел нас к верному ответу в предыдущем примере.

$$|x-1| < \frac{3}{2} - 2x \quad \boxed{\Leftrightarrow} \quad \left[\begin{aligned} x-1 &< \frac{3}{2} - 2x \\ -(x-1) &< \frac{3}{2} - 2x \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} x &< \frac{5}{6} \\ x &< \frac{1}{2} \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{5}{6}.$$

Ответ получился неверным! В чем же дело? А в том, что мы не учли, что раскрытие модуля со знаком $+$ или $-$ возможно лишь при *некоторых* значениях переменной x (а не при всех, как мы молчаливо предположили сейчас). Именно для этого мы четко прописывали *условия на* x, при которых модуль $|x-1|$ раскрывался с тем или иным знаком. Игнорирование этих условий может привести к неверному ответу, причем, как видно, невозможно заранее предугадать, получится ли ответ верным или неверным. А раз так, то такой переход *нельзя совершать никогда*; следует аккуратно выписывать ограничения на x и лишь после этого раскрывать модуль (поскольку именно после явно выписанных ограничений мы получаем нужную информацию для раскрытия модуля с тем или иным знаком).

Итак, если модуль один, то справиться с ним мы можем, причем сделать это не очень сложно: достаточно разобрать всего лишь два случая. Однако если модулей уже два, то кажется, что нужно разбирать уже четыре случая. Действительно, каждый модуль может быть раскрыт с двумя знаками $+$ и $-$, соответственно, всего способов раскрыть модули $2^2 = 4$. А если модулей три, то $2^3 = 8\ldots$ Это уже слишком много для практических задач…

Оказывается, что существует способ ограничить эти случаи и упорядочить перебор так, чтобы он стал обозримым и реальным. Например, для трех модулей оказывается достаточным разобрать всего лишь четыре случая, а не восемь. Сделать это удается с помощью метода, который является, возможно, самым универсальным способом борьбы с модулями, и называется он «*точки и кусочки*». Разберем его на примере следующей задачи.

Пример 6. Решить неравенство $|3 - x| + |2x - 4| - |x + 1| > 2x + 4$.

Прежде всего перенесем все слагаемые в одну часть, а внутри всех модулей сделаем старшие коэффициенты перед переменной x положительными. Этого легко добиться, просто поменяв знаки внутри модуля у всех слагаемых (по сути умножить подмодульное выражение на -1): поскольку модуль не замечает знака числа, этот знак можно менять по своему усмотрению. Во многих задачах полезно выполнять такую смену знака, приводя выражение к привычному виду, когда перед старшей степенью переменной стоит именно положительный коэффициент. В результате получится вот такое неравенство:

$$|x - 3| + |2x - 4| - |x + 1| - 2x - 4 > 0.$$

Наша ближайшая цель — избавиться от модулей. Как мы уже знаем, чтобы сделать это, необходимо определить знаки всех подмодульных выражений, присутствующих в данном неравенстве. На разных промежутках числовой прямой эти знаки будут разными, поэтому нам нужно четко понять, на каких промежутках какой знак имеет каждое из подмодульных выражений.

Для этого поступим следующим образом. Возьмем координатную прямую и отметим на ней нули каждого модуля. У нас получится три точки, которые разбивают прямую на четыре части. А теперь заметим, что если x лежит внутри одной фиксированной части и не перепрыгивает через ее границы (т.е. через нуль одного из модулей), то знаки всех подмодульных выражений не меняются! В самом деле, знак может измениться, только если x перейдет через нуль одного из модулей! А раз так, то достаточно рассмотреть всего лишь четыре случая положения переменной x, а не восемь, как было бы при прямом переборе случаев.

В этом и заключается суть метода «точки и кусочки». Точки (т.е. нули подмодульных выражений) разбивают координатную прямую на кусочки, и на каждом таком кусочке модули могут быть раскрыты с фиксированным знаком. Осталось лишь аккуратно перебрать все случаи.

Чтобы упростить перебор, поступим так. Над каждым кусочком напишем знаки подмодульных выражений (в том порядке, в котором они записаны в нашем неравенстве), которые получаются, если x лежит на данном кусочке (см. рис. 4). Это легко сделать, двигаясь *справа налево*, поскольку при больших положительных значениях переменной x знаки всех подмодульных выражений будут *положительны*. Здесь мы довольно близко подходим к еще одному методу решения задач с неравенствами — *методу интервалов*, который идейно во многом повторяет метод «точки и кусочки», но применяется к более сложным неравенствам. Затем, двигаясь к каждому следующему кусочку, нужно просто менять знак у того модуля, через нуль которого мы перешагнули. Например, при переходе с промежутка $[3; +\infty)$ на промежуток $[2; 3]$, мы изменили знак у первого подмодульного выражения $x - 3$, потому что именно через точку 3 мы перешагнули.

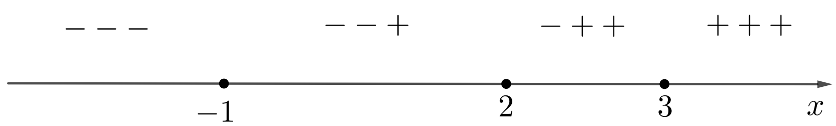

Рис. 4.

Отметим, что точки-границы входят в оба кусочка точно так же, как и при раскрытии одного модуля по случаям. Осталось провести перебор всех случаев (напомним, что для этого необходимо выписать *системы неравенств*).

1. $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ (x-3)+(2x-4)-(x+1)-2x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ -12>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

2. $\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ -(x-3)+(2x-4)-(x+1)-2x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ x<-3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

3. $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -(x-3)-(2x-4)-(x+1)-2x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x<\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{-1 \leqslant x < \dfrac{1}{3}}.$

4. $\begin{cases} x \leqslant -1 \\ -(x-3)+(2x-4)+(x+1)-2x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -1 \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \leqslant -1}.$

Ответ: $x < \dfrac{1}{3}$.

Следует помнить, что этот способ действительно *самый универсальный*, т.е. он *может быть применен* в наибольшем количестве задач (по сравнению с другими методами). Но просто так ничего не дается, и за все в этой жизни надо платить. В данном случае за универсальность метода «точки и кусочки» мы платим, во-первых, скоростью решения, а во-вторых, его надежностью. Иначе говоря, во многих задачах этот метод работает *медленнее*, чем другие соображения, которые пусть и не так универсальны, но зато в данной конкретной ситуации имеют существенное преимущество. Кроме того, бывают задачи (в дальнейшем мы с ними столкнемся), которые *в принципе не могут быть решены* методом «точки и кусочки»! Поэтому изучать и отрабатывать другие методы работы с модулями обязательно нужно. С другой стороны, полезно также понимать, в какой ситуации удобно просто раскрыть модуль по случаям.

7. $2|x+1| = 2-3x$.

8. $|4x-6| = 2(3x-4)$.

9. $|x+1| = \dfrac{-2x+3}{2}$.

10. $|4x-|x-2|+3| = 16$.

11. $|x+|1-x|| > 3$.

12. $3|x-1| > x+3$.

13. $2x-5 \leqslant |x-1|$.

4. Линейные модули

В рамках 7 класса рассматриваются в основном *линейные уравнения и неравенства*, т.е. уравнения и неравенства, содержащие переменную x в первой степени. Выше мы рассмотрели различные способы работы с линейными выражениями, содержащими модули. Как видно, некоторые из них работают быстрее, некоторые медленнее. Сейчас мы рассмотрим, наверное, один из самых быстрых и красивых способов работы с *линейными модулями*, который основан на построении графиков функций, содержащих модули.

Пример 7. Решить уравнение

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = |x+2|.$$

Поскольку модулей в данном уравнении аж пять штук, раскрывать их по случаям, используя точки и кусочки, очень неудобно: это приведет к разбору шести (!) случаев, при работе с которыми легко ошибиться (не говоря уже о времени, необходимом для проведения всех вычислений). Оказывается, можно поступить проще.

Давайте для начала перенесем все слагаемые в одну часть и обозначим эту часть через $f(x)$:

$$f(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| - |x+2| = 0.$$

Теперь мы сделаем неожиданный ход: попробуем *построить график функции* f. Казалось бы, зачем? Нам же уравнение нужно решать! Как в этом может помочь какая-то картинка?

Оказывается, может. Для начала поймем, что собой представляет график функции f. В уравнении для этой функции есть модули. Если бы мы раскрыли эти модули по точкам и кусочкам, то на каждом кусочке мы получили бы *линейное уравнение*, не содержащее модулей. Иначе говоря, на каждом кусочке графиком функции f является часть прямой (отрезок или луч). Но тогда графиком функции f на всей числовой прямой является *ломаная*!

Как можно быстрее всего нарисовать ломаную? Наверняка в детстве вы играли в такую игру: на рисунке были отмечены пронумерованные точки, и их нужно было последовательно соединить отрезками — сначала провести отрезок между точками 1 и 2, затем — между точками 2 и 3, и т.д. В результате получался достаточно сложный рисунок, хотя сам процесс его построения был чисто механическим.

Похожая техника нам понадобится и сейчас. Для этого заметим, что ломаную можно задать *вершинами*, т.е. точками излома: именно эти точки потом надо будет соединить, чтобы получить готовую картинку. А в каких точках возникает излом модуля? В его нуле (т.е. в нуле подмодульного выражения). Поэтому первым делом давайте вычислим все точки, в которых *один из модулей* обращается в нуль, и отметим их на координатной плоскости (для этого надо не забыть вычислить еще и значение функции f). Пойдем по порядку расположения модулей в нашем уравнении:

- $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 - |-1| + 3|-1-1| - 2|-1-2| - |-1+2| = -1+6-6-1 = -2;$
- $x = 0 \Rightarrow f(0) = |0+1| - 0 + 3|0-1| - 2|0-2| - |0+2| = 1+3-4-2 = -2;$
- $x = 1 \Rightarrow f(1) = |1+1| - |1| + 0 - 2|1-2| - |1+2| = 2-1-2-3 = -4;$
- $x = 2 \Rightarrow f(2) = |2+1| - |2| + 3|2-1| - 0 - |2+2| = 3-2+3-4 = 0;$
- $x = -2 \Rightarrow f(-2) = |-2+1| - |-2| + 3|-2-1| - 2|-2-2| - 0 = 1-2+9-8 = 0.$

Теперь отметим эти точки на координатной плоскости и последовательно соединим их отрезками, двигаясь слева направо (см. рис. 5).

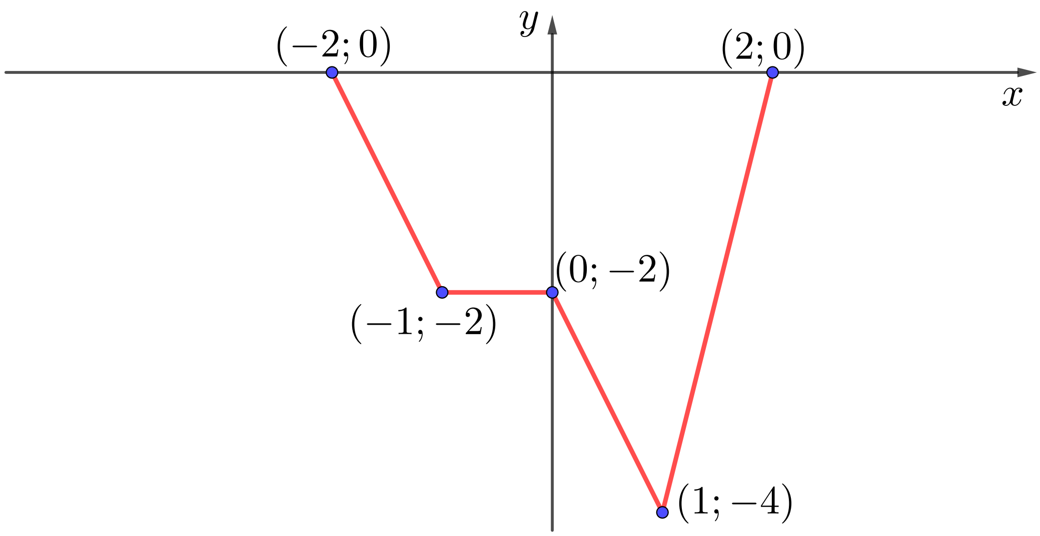

Рис. 5.

График функции f почти готов! Непонятно только, что делать на двух лучах, идущих от крайних точек направо и налево... Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно посчитать значения функции f еще в двух точках (они называются *пробными точками*), лежащими правее и левее уже отмеченных нами нулей. Например, посчитаем функцию f в точках $x = 3$ и $x = -3$:

- $x = 3 \Rightarrow f(3) = |3+1| - |3| + 3|3-1| - 2|3-2| - |3+2| = 4-3+6-2-5 = 0;$
- $x = -3 \Rightarrow f(-3) = |-3+1| - |-3| + 3|-3-1| - 2|-3-2| - |-3+2| = 2-3+12-10-1 = 0.$

Осталось провести недостающие два луча, и мы получаем готовый график функции f (см. рис. 6).

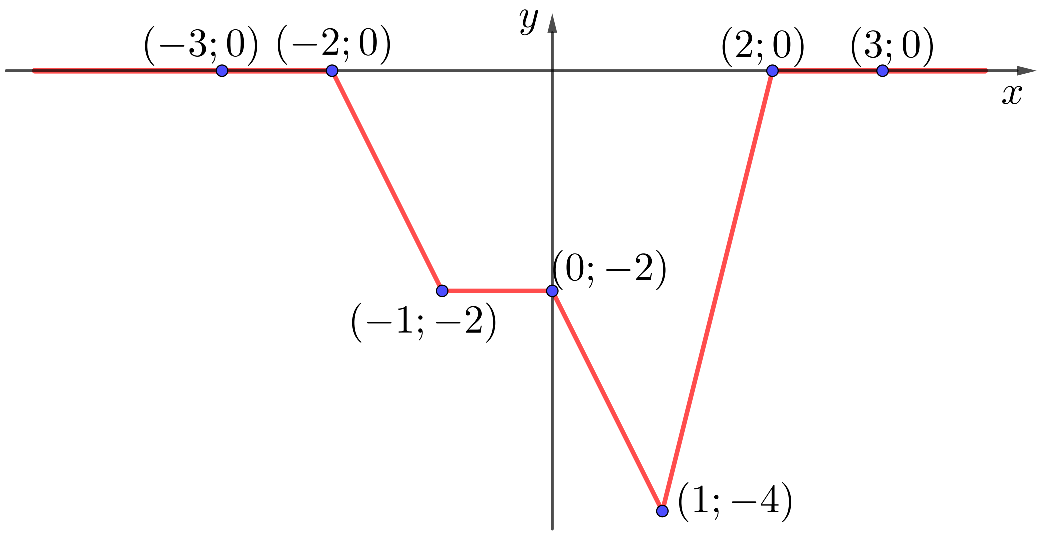

Рис. 6.

Казалось бы, ну и что? Ну построили мы график, а уравнение-то как решить? А вот как! Мы хотим найти такие x, что $f(x) = 0$. Иначе говоря, мы хотим найти *точки пересечения графика функции* f *с осью абсцисс*! Еще раз взглянем на картинку... Точки *уже нарисованы*! Ответ готов!

Ответ: $x \leqslant -2$, $x \geqslant 2$.

Обратите внимание: мы совершенно строго и обоснованно получили верный ответ, не проведя *никаких алгебраических преобразований*! Мы не раскрывали модули (вообще ни один), даже не решали линейных уравнений! График сразу *показал нам* нужный ответ. Как оказывается, такое бывает довольно часто.

Рассмотрим более трудный пример, где вычислять корни все-таки приходится вручную. Но и здесь график нам поможет избежать раскрытия модулей по случаям...

Пример 8. Решить неравенство

$$2|x-4| + |3x+5| \leqslant 16.$$

Техническую часть построения графика функции мы уже не будем комментировать, а просто запишем краткую цепочку преобразований и вычислений (именно такое оформление должно проводиться в подобных задачах).

$$2|x-4| + |3x+5| \leqslant 16 \Leftrightarrow$$
$$(f(x) =) 2|x-4| + |3x+5| - 16 \leqslant 0.$$

Построим график функции f.

1. Нули модулей:

- $x = 4 \Rightarrow f(4) = 0 + |3 \cdot 4 + 5| - 16 = 1;$
- $x = -\dfrac{5}{3} \Rightarrow f\Big(-\dfrac{5}{3}\Big) = 2\Big|-\dfrac{5}{3} - 4\Big| - 16 = \dfrac{34}{3} - 16 = -\dfrac{14}{3}.$

2. Пробные точки:

- $x = 5 \Rightarrow f(5) = 2|5-4| + |3 \cdot 5 + 5| - 16 = 2 + 20 - 16 = 6;$

- $x = -2 \Rightarrow f(-2) = 2|-2-4| + |3\cdot(-2)+5| - 16 = 12 + 1 - 16 = -3.$

Заметим, что ответом в исходном неравенстве будут те и только те x, значения функции f в которых неположительны. Иначе говоря, нам нужны те x, в которых график функции f лежит ниже оси абсцисс. Выделяя эту часто графика, получаем, что нам подходят точки x, такие, что $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ (см. рис. 7). Но как найти x_1 и x_2?

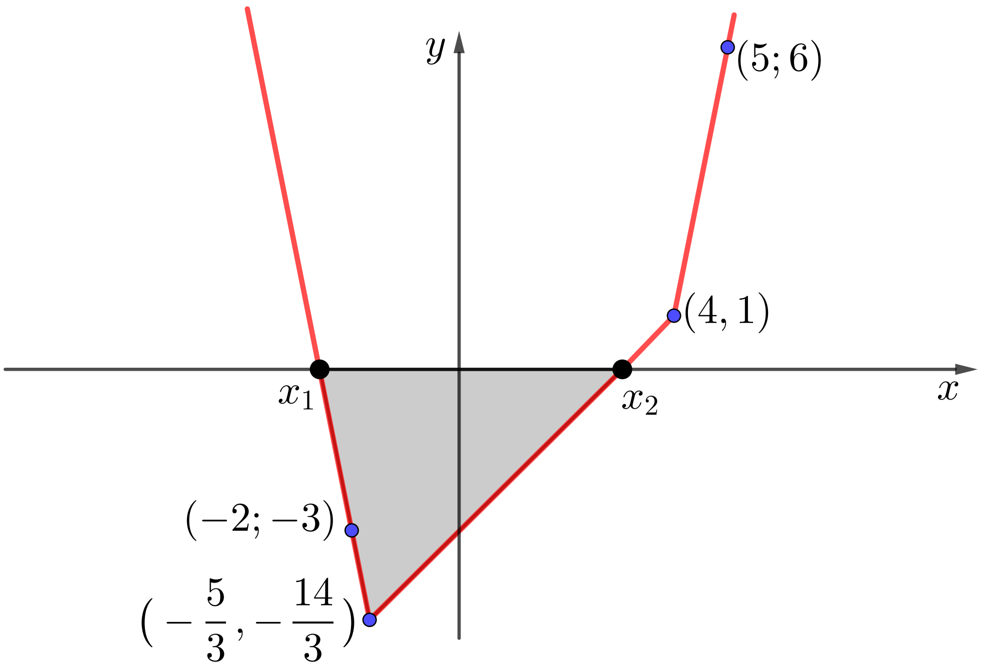

Рис. 7.

Здесь нам все-таки придется избавиться от модулей. Но мы не будем разбирать случаи для того, чтобы найти x_1 и x_2. Вспомним, почему уравнения и неравенства с модулями требуют разбора случаев: они требуют разбора случаев потому, что *непонятно*, какой знак имеют подмодульные выражения. Не зная, положительны они или отрицательны, мы вынуждены предполагать несколько случаев, отбрасывая затем те, которые нам не подходят (в этом заключается метод «точки и кусочки»).

Но теперь в нашем распоряжении есть картинка! И она *совершенно точно* показывает расположение интересующих нас точек x_1 и x_2 относительно нулей подмодульных выражений. Иначе говоря, нарисовав график функции f, мы *знаем*, как должны быть раскрыты модули при $x = x_1$ и при $x = x_2$: это в точности наши точки и кусочки! Но если без графика мы не знали, на какие кусочки попадают корни функции f, то теперь в нашем распоряжении есть рис. 7, на котором эта информация отображена!

Рассмотрим, например, корень x_1. Видно, что он располагается левее нулей обоих модулей. Значит, оба модуля в точке x_1 должны быть раскрыты со знаком $-$:

$$\begin{aligned}-2(x_1-4)-(3x_1+5)-16=0 &\Leftrightarrow\\ -5x_1-13=0 &\Leftrightarrow\\ x_1=-\frac{13}{5}&.\end{aligned}$$

Аналогично находится второй корень x_2:

$$\begin{aligned} -2(x_2-4)+(3x_2+5)-16=0 &\Leftrightarrow \\ x_2-3=0 &\Leftrightarrow \\ x_2=3. & \end{aligned}$$

Кстати говоря, выполнив аккуратную картинку, совершенно допустимо *угадать* корень x_2 (разумеется, записав в решении проверку того, что этот корень действительно подходит). Однако нужно иметь в виду, что корни наподобие $x_1=-\frac{13}{5}$ возникают довольно часто, и угадать их уже не получится.

Ответ: $-\dfrac{13}{5}\leqslant x\leqslant 3$.

В заключение этого раздела покажем способ решения *систем уравнений*, содержащих линейные модули.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y-2|x|+3=0 \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$$

Разумеется, можно выразить из первого уравнения переменную y через переменную x, подставить ее во второе уравнение и решить получившееся уравнение с линейными модулями от x. Но уравнение получается довольно громоздкое, и хотя решить его не очень сложно, на это все же требуется существенное количество времени. Оказывается, можно поступить по-другому.

Заметим, что уравнения нашей системы по-прежнему можно трактовать как уравнения некоторых *ломаных* на координатной плоскости. И если нам удастся нарисовать эти ломаные и отметить точки их пересечения, то это позволит нам снять модули без разбора случаев, поскольку картинка задаст нам их положения относительно нулей подмодульных выражений.

Нарисовать ломаную, соответствующую первому уравнению, не составляет труда, так что мы не будем на этом останавливаться. Посмотрим, как можно нарисовать вторую ломаную, заданную уравнением $|y|+x-3=0$. Оказывается, что здесь действует ровно та же самая идеология, что и при изображении привычных нам линейных модулей, содержащих переменную x.

Во-первых, вычислим вершину ломаной, т.е. точку, в которой модуль $|y|$ обращается в 0. Ясно, что теперь $y=0$, а x легко находится: $x=3$. Теперь нам нужны пробные точки. Подставим $x=0$ и получим простейшее уравнение $|y|=3$, решая которое, получаем $y=\pm 3$ и сразу две пробные точки $(0;3)$ и $(0;-3)$. Осталось провести лучи и получить готовую картинку (см. рис. 8).

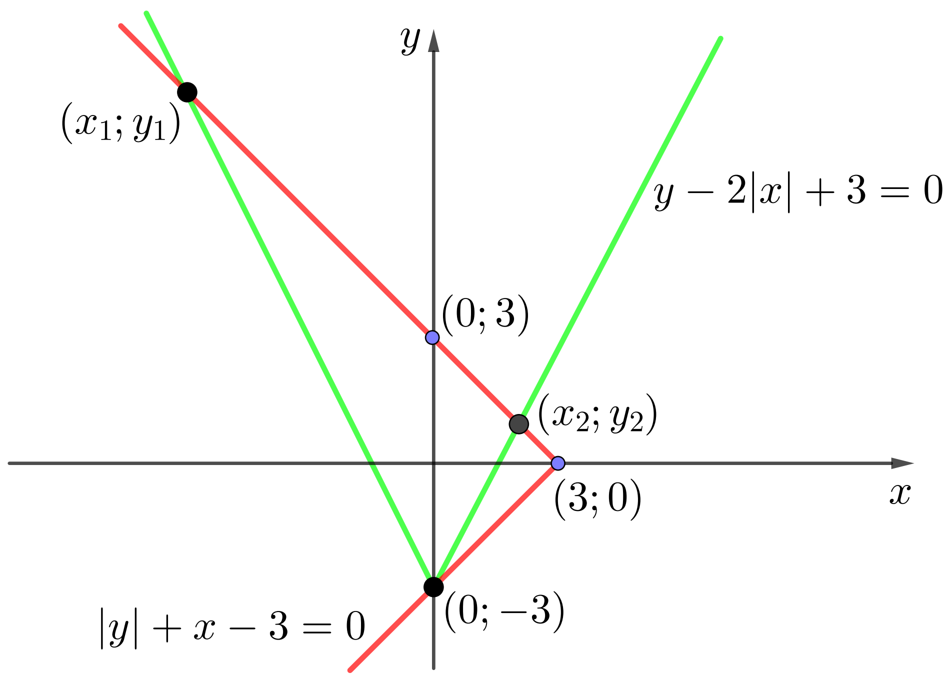

Рис. 8.

Теперь подумаем, что означает решить систему уравнений с точки зрения графиков. Это означает, что нам нужно найти координаты точек пересечения этих двух графиков (на рисунке эти точки отмечены черным цветом). Обратите внимание: опять одна из точек получается бесплатно, просто из картинки — это точка $(0; -3)$. Это и есть одно из решений нашей системы!

Теперь более трудная задача: как найти оставшиеся две точки пересечения? Начнем с точки $(x_1; y_1)$. И снова картинка приходит нам на помощь: *зная*, где находится эта точка, мы можем снять модули, не разбирая случаев! Видно, что в точке пересечения $(x_1; y_1)$ выполнены неравенства $x_1 < 0$ и $y_1 > 0$. А раз так, система в точке $(x_1; y_1)$ переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} y_1 + 2x_1 + 3 = 0 \\ y_1 + x_1 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1 + 2x_1 + 3) - (y_1 + x_1 - 3) = 0 \\ (y_1 + 2x_1 + 3) - 2(y_1 + x_1 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = 9. \end{cases}$$

Абсолютно аналогично находится точка $(x_2; y_2)$: в ней $x_2 > 0$ и $y_2 > 0$. В результате получаем систему

$$\begin{cases} y_2 - 2x_2 + 3 = 0 \\ y_2 + x_2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_2 - 2x_2 + 3) - (y_2 + x_2 - 3) = 0 \\ (y_2 - 2x_2 + 3) + 2(y_2 + x_2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Отметим, что в этом случае, выполнив аккуратный чертеж на клетчатой бумаге, несложно *угадать* эту точку (разумеется, при этом необходимо записать в решении проверку того, что эта точко действительно удовлетворяет нашей системе).

Ответ: $(0; -3)$, $(-6; 9)$, $(2; 1)$.

14. $|x+1|+|x+2|=2$.

15. $|x-1|+|x+2|-2x=1$.

16. $|x^2-4|+|9-x^2|=5$.

17. $|5x-13|-|6-5x|=7$.

18. $2|x-4|+|3x+5|\geqslant 16$.

19. $|5x-3|-|7x-4|=|2x-1|$.

20. $|x+1+|-x-3||-6=x$.

21. $\begin{cases} y+|x+1|=1 \\ |y-x|=5. \end{cases}$

22. Числа a и b удовлетворяют неравенствам $|3a-2b|\leqslant 1$ и $|2a-3b|\leqslant 1$. Какое наибольшее значение может принимать $|a|$?