УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ — 2

П. В. Бибиков[1]

Содержание

1. Введение

Данный текст продолжает методическое пособие «Уравнения и неравенства с модулями – 1» и посвящен более сложным и глубоким техникам работы с модулями, рассчитанным на 8-9 классы. Несмотря на то, что уравнения и неравенства с модулями начинают изучаться еще в 7-8 классах, задачи такого типа традиционно являются камнем преткновения для многих школьников. Причина тому проста: уравнения и неравенства с модулями являются *одной из самых сложных тем* школьного курса алгебры. Задачи, в которых фигурируют модули, сложны и разнообразны, методов решения таких задач существует очень много, а выбрать нужный метод зачастую нелегко. При этом школьники обычно помнят только раскрытие модулей по случаям (этот метод, который еще называется «Точки и кусочки», содержится в первой части пособия), что обычно крайне неудобно при решении комбинированных задач с тригонометрией, логарифмами и т.д. Кроме того, о подобных сложностях прекрасно знают составители перечневых олимпиад, поэтому, предлагая задачу с модулем на олимпиаде, они как раз и рассчитывают на то, что школьники будут просто разбирать случаи раскрытия модулей (хотя простое решение иногда может быть получено совсем по-другому и гораздо быстрее). У школьников на это уходит много сил и времени, в результате чего они, даже решив задачу правильно, уже просто не успевают справиться с оставшимися номерами.

Цель данного пособия — четко зафиксировать набор методов, которые могут применяться при решении задач с модулями, соответствующими программе 8–9 класса (после изучения квадратных трехчленов и метода интервалов). Эти методы представлены в трех разделах: «Снятие модулей», «Домножение на сопряженное» и «Неравенство треугольника». В то же время полезно регулярно предлагать школьникам подобные задачи, чтобы освежать в памяти технику решения этих довольно непростых примеров.

[1]Лицей «Вторая школа»; *e-mail*: bibikov.pv@sch2.ru

2. Снятие модулей

Прежде всего мы должны научиться избавляться от одного-единственного модуля. Можно сказать, что если модуль один, то раскрыть его по случаям, пользуясь методом «Точки и кусочки», совсем просто. Однако такое утверждение весьма спорно: под модулем может стоять довольно сложное выражение, например, многочлен второй и даже третьей степени, рациональная дробь, и т.д. Поэтому вычисление нулей подмодульного выражения может превратиться в довольно трудную задачу. А если мы решаем неравенство и должны еще пересекать соответствующие интервалы, то вероятность ошибиться в вычислениях возрастает еще больше...

Конечно, это не означает, что «Точки и кусочки» совсем не применяются в таких ситуациях. Но обычно их полезно использовать, только если нули подмодульных выражений «хорошие», т.е. они являются целыми или рациональными числами. В остальных случаях разумно поступить по-другому.

Давайте рассмотрим общий вид уравнения с одним модулем. Тогда полезно *уединить модуль*, т.е. перенести его в одну часть, а все остальные выражения — в другую. В результате наш пример запишется так: $|f(x)| = g(x)$, где f и g — некоторые функции от переменной x (например, многочлены). Как справиться с модулем в такой ситуации?

Мы знаем, что если в правой части стоит неотрицательная константа (т.е. если $g(x) = c \geq 0$), то снять модуль можно, пользуясь его геометрическим определением: $f(x) = \pm c$, и тем-самым задача сводится к решению пары уравнений уже без модуля. С другой стороны, если в правой части стоит отрицательное число, то уравнение не имеет решений, т.к. модуль по определению неотрицателен. Как обобщить эти соображения на случай переменной правой части?..

Да точно так же! Ведь можно посмотреть на уравнение $|f(x)| = g(x)$ как на равенство двух *чисел* при фиксированном x. Например, если мы подставим $x = 0$, то равенство $|f(0)| = g(0)$ возможно тогда и только тогда, когда $g(0) \geqslant 0$ и $f(0) = \pm g(0)$. Но аналогичное можно сказать и в случае любого другого числа x! Получается, что уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} f = \pm g \\ g \geqslant 0 \end{cases}.$$

Это и есть наша цель — избавиться от модуля! За это нам пришлось заплатить, во-первых, необходимостью решить два уравнения вместо одного (одно уравнение соответствует знаку «+» в правой части, а другое — знаку «−»), а во-вторых, дополнительным неравенством $g(x) \geqslant 0$. Но это типичная ситуация при избавлении от сложных выражений; аналогичные системы будут у нас появляться и при решении уравнений с корнями, логарифмами...

Запомнить этот прием очень просто: достаточно осознать, что снятие модуля в уравнении $|f(x)| = g(x)$ с *переменной* правой частью осуществляется почти так же, как и в аналогичном уравнении с *постоянной* правой частью! Единственное отличие — необходимое ограничение $g(x) \geqslant 0$, которое важно не забывать, поскольку противном случае в ответ попадут посторонние корни, соответствующие неверным равенствам в духе $|1| = -1$.

Данный прием и называется *снятие модуля*: мы не исследуем знаки подмодульного выражения, а избавляемся от модуля сразу. Посмотрим, как он работает на практике, и сравним его с обычным методом «Точки и кусочки».

Пример 1. Решить уравнение

$$|2x^2 - 3x - 4| = 6x - 1.$$

Решение. Мы решим эту задачу двумя методами. Сначала попробуем разобрать случаи, пользуясь «Точками и ксочками», а потом посмотрим на наш новый прием снятия модуля.

Способ 1 (Точки и кусочки) Первое, что нам нужно сделать — это найти нули подмодульного выражения и определить его знаки в частях, на которые эти нули делят координатную прямую. Решим уравнение $2x^2 - 3x - 4 = 0$ и получим два корня: $a_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{3^2+4\cdot4\cdot2}}{4} = \frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$. Отметим знаки подмодульного выражения на координатной прямой.

Таким образом, нам нужно разобрать два случая.

Случай 1.

$$\begin{cases} x \in (-\infty; a_1] \cup [a_2; +\infty)] \\ 2x^2 - 3x - 4 = 6x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; a_1] \cup [a_2; +\infty)] \\ 2x^2 - 9x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x \in (-\infty; a_1] \cup [a_2; +\infty)] \\ x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{105}}{4}. \end{cases}$$

Теперь нам нужно сравнить корни, чтобы понять, какой из ответов нужно выбрать. Ясно, что

$$x_2 = \frac{9+\sqrt{105}}{4} > \frac{3+\sqrt{41}}{4} = a_2,$$

поэтому корень x_2 подходит. С другой стороны, $x_1 = \frac{9-\sqrt{105}}{4} < 0 < a_2$ и

$$x_1 = \frac{9-\sqrt{105}}{4} \vee \frac{3-\sqrt{41}}{4} = a_1 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - \sqrt{105} \vee 3 - \sqrt{41} \quad \Leftrightarrow 6 + \sqrt{41} \vee \sqrt{105}.$$

Но $6 + \sqrt{41} > 6 + 6 > 11 > \sqrt{105}$, поэтому $x_1 > a_1$. Таким образом, корень x_1 нам не подходит.

Случай 2.

$$\begin{cases} x \in [a_1; a_2] \\ -\left(2x^2 - 3x - 4\right) = 6x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a_1; a_2] \\ 2x^2 + 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a_1; a_2] \\ x_{3,4} = -\dfrac{5}{2}; 1. \end{cases}$$

Нам снова требуется произвести отбор корней. Начнем с более простого корня $x_4 = 1$. Ясно, что $x_4 > 0 > a_1$ и $x_4 < \frac{3}{2} = \frac{3+3}{4} < \frac{3+\sqrt{41}}{4}$, поэтому корень x_4 нам подходит. Наконец,

$$x_3 = -\frac{5}{2} \vee \frac{3-\sqrt{41}}{4} = a_1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{41} \vee 13.$$

Т.к. $\sqrt{41} < 13$, то $x_3 < a_1$, поэтому этот корень нам не нужен.

Таким образом, окончательный ответ таков: $x = 1; \frac{9+\sqrt{105}}{4}$.

Способ 2 (Снятие модуля) Сделаем цепочку равносильных преобразований:

$$\left|2x^2 - 3x - 4\right| = 6x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &2x^2 - 3x - 4 = 6x - 1 \\ &2x^2 - 3x - 4 = -(6x - 1) \end{aligned}\right. \\ 6x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &2x^2 - 9x - 3 = 0 \\ &2x^2 + 3x - 5 = 0 \end{aligned}\right. \\ x \geqslant \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{4} \\ &x_{3,4} = -\frac{5}{2}; 1 \end{aligned}\right. \\ x \geqslant \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Обратите внимание, что нам по-прежнему необходимо отбирать корни, но теперь сравнивать возможные корни нам нужно с *рациональным* числом! Для корней x_3, x_4 это совсем просто: видно, что подходит только корень $x_4 = 1$. Для корней x_1 и x_2 нужно только чуть внимательнее присмотреться к ним: ясно, что $x_2 = \frac{9+\sqrt{105}}{4} > \frac{1}{6}$, а $x_1 = \frac{9-\sqrt{105}}{4} < 0 < \frac{1}{6}$. Поэтому корень x_2 нам подходит, а корень x_1 — нет. Вот и все! Нам даже не пришлось ничего возводить в квадрат!

Ответ: 1, $\frac{9+\sqrt{105}}{4}$.

Как видно, в ситуации, когда нули подмодульного выражения иррациональны, снятие модуля дает ощутимый выигрыш в простоте решения: нам не приходится сравнивать друг с другом громоздкие корни.

Теперь попробуем снять модули в неравенствах. Начнем с неравенства вида $|f(x)| < g(x)$ (случай нестрогого неравенства $|f(x)| \leqslant g(x)$, как легко видеть, полностью ему аналогичен). Как мы помним, если правая часть $g(x)$ равна положительной константе c, то наше неравенство равносильно двойному неравенству $-c < f(x) < c$, а если константа c неположительна, то решений у нашего неравенства нет. Вспомним, однако, что при решении *неравенств* мы ранее никогда не рассматривали случай отрицательной константы. Почему?

Давайте внимательно посмотрим на двойное неравенство $-c < f(x) < c$. Уберем из него центральную функцию $f(x)$ и оставим только константы $-c$ и c. Получится неравенство $-c < c$, из которого сразу следует, что $c > 0$! Вот в чем дело! Оказывается, что при таком снятии модуля знак правой части *учитывается автоматически*! Иначе говоря, если бы справа стояла отрицательная константа, то система $-c < f(x) < c$ не имела бы решений! Вот почему мы не заботились о знаке константы.

Теперь понятно, как снять модуль для произвольной правой части $g(x)$: нужно просто написать двойное неравенство $-g(x) < f(x) < g(x)$! Далее удобно переписать это двойное неравенство в виде *системы* $\begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{cases}$. Здесь (в отличие от случая уравнения!) *не требуется* дополнительно выписывать неравенство $g(x) > 0$, поскольку оно является следствием нашей системы (т.е. неявно в ней содержится).

Пример 2. Решить неравенство $|x^2 + 2x - 7| < 2x$.

Решение. Мы уже не будем рассматривать случаи, пользуясь «Точками и кусочками», а сразу избавимся от модуля. Имеем:

$$|x^2+2x-7| < 2x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+2x-7 < 2x \\ x^2+2x-7 > -2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-7 < 0 \\ x^2+4x-7 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) < 0 \\ (x-x_1)(x-x_2) > 0, \quad \text{где } x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2+7} = -2 \pm \sqrt{11}. \end{cases}$$

Заметим, что $x_1 = -2 - \sqrt{11} < -2 - 3 = -5 < -\sqrt{-7}$ и $x_2 = -2 + \sqrt{11} < -2 + 4 = 2 < \sqrt{7}$, поэтому змейки для метода интервалов будут выглядеть так:

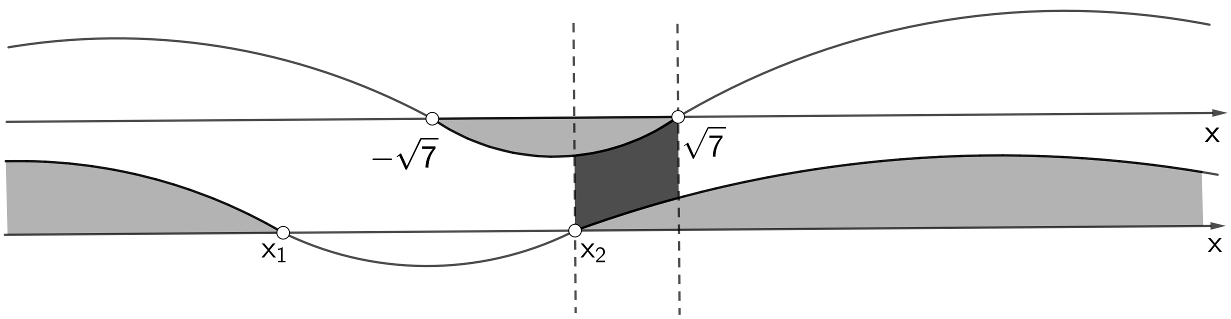

Рис. 1.

Ответ: $-2 + \sqrt{11} < x < \sqrt{7}$.

Абсолютно аналогично можно снять модуль в обратном неравенстве $|f(x)| > g(x)$. Вспомним, что в случае, когда правая часть $g(x)$ равна константе c, модуль снимается следующим образом: $\left[\begin{array}{l} f(x) > c \\ f(x) < -c \end{array}\right.$ (*совокупность* неравенств). Опять-таки, мы ранее не задумывались о знаке константы c. Понятно, что если $c < 0$, то любой x, входящий в ОДЗ исходного неравенства $|f(x)| > c$, будет его решением. С другой стороны, если посмотреть на совокупность, то в ней решениями будут те x, для которых число $f(x)$ либо больше отрицательного числа c, либо меньше положительного числа $-c$. Но это означает, что любое x из ОДЗ нам подходит! Т.е. и здесь в совокупности при снятии модуля неявно учитывается случай отрицательной правой части, а потому нет необходимости рассматривать ее отдельно.

Поэтому в общем неравенстве $|f(x)| > g(x)$ модуль снимается с помощью перехода к совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$. И снова нет необходимости требовать дополнительных условий от правой части $g(x)$; все необходимое уже учтено в самой совокупности.

Отметим, что в результате сложнее всего снять модуль в *уравнении* $|f(x)| = g(x)$: здесь (и только здесь!) необходимо дополнительно потребовать, чтобы правая часть была бы неотрицательной; во всех случаях неравенств знак правой части будет учтен при переходе к системе или совокупности без модуля.

Пример 3. Решить неравенство $|x^2 - 3| + 2x + 1 \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим цепочку равносильных преобразований:

$$|x^2 - 3| + 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 3| \geqslant -2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 3 \geqslant -2x - 1 \\ x^2 - 3 \leqslant 2x + 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 2 \geqslant 0 \\ x^2 - 2x - 4 \leqslant 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} (x - x_1)(x - x_2) \geqslant 0, & \text{где } x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 2} = -1 \pm \sqrt{3} \\ (x - x_3)(x - x_4) \leqslant 0, & \text{где } x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 + 4} = 1 \pm \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Поскольку $x_1 = -1 - \sqrt{3} < -2 = 1 - 3 < 1 - \sqrt{5} = x_3$ и $x_2 = 1 + \sqrt{3} < 1 + \sqrt{5} = x_4$, змейки для метода интервалов будут выглядеть так:

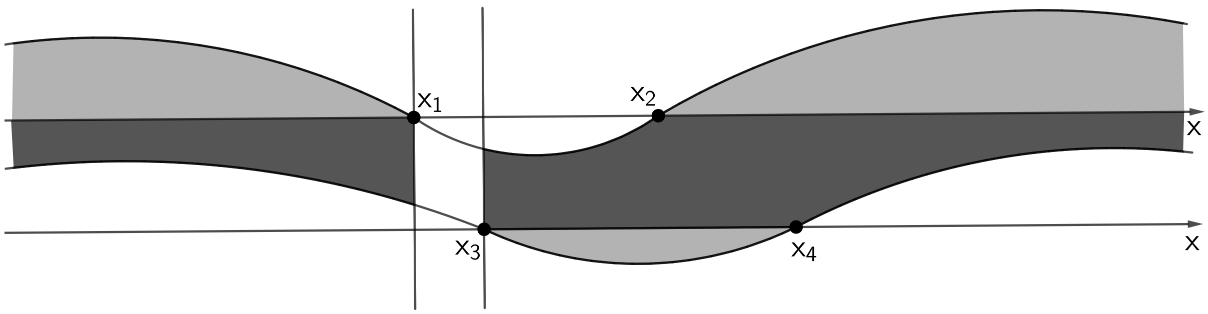

Рис. 2.

Ответ: $x \leqslant -1 - \sqrt{3}$, $x \geqslant 1 - \sqrt{5}$.

Теперь рассмотрим довольно трудный пример, решить который без снятия модулей скорее всего, не получится.

Пример 4. Решить неравенство

$$\left||x^2 - 8x + 2| - x^2\right| \geqslant 2x + 2.$$

Мы даже не станем пытаться решать эту задачу методом «Точки и кусочки»: наличие двух модулей, вложенных друг в друга, и иррациональные корни нулей этих модулей вряд ли позволят нам довести такое решение до конца. С другой стороны, посмотрим, насколько быстро нам поможет снятие модулей.

Сделаем цепочку равносильных преобразований:

$$\left||x^2 - 8x + 2| - x^2\right| \geqslant 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} |x^2 - 8x + 2| - x^2 \geqslant 2x + 2 \\ |x^2 - 8x + 2| - x^2 \leqslant -(2x + 2) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} |x^2 - 8x + 2| \geqslant x^2 + 2x + 2 \\ |x^2 - 8x + 2| \leqslant x^2 - 2x - 2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 8x + 2 \geqslant x^2 + 2x + 2 \\ x^2 - 8x + 2 \leqslant -(x^2 + 2x + 2) \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 2 \leqslant x^2 - 2x - 2 \\ x^2 - 8x + 2 \geqslant -(x^2 - 2x - 2) \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leqslant 0 \\ \begin{cases} \hfill x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x^2 - 5x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ (x - 1)(x - 2) \leqslant 0 \\ \begin{cases} \hfill x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x(x - 5) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Возникшую систему совсем легко решить с помощью метода интервалов. Нужно лишь внимательно следить за тем, какие области мы должны пересечь, а какие объединить. Разумно отдельно нарисовать совокупность из первых двух неравенств, и отдельно — систему из последних двух, а затем объединить полученные области. В результате получаются следующие картинки.

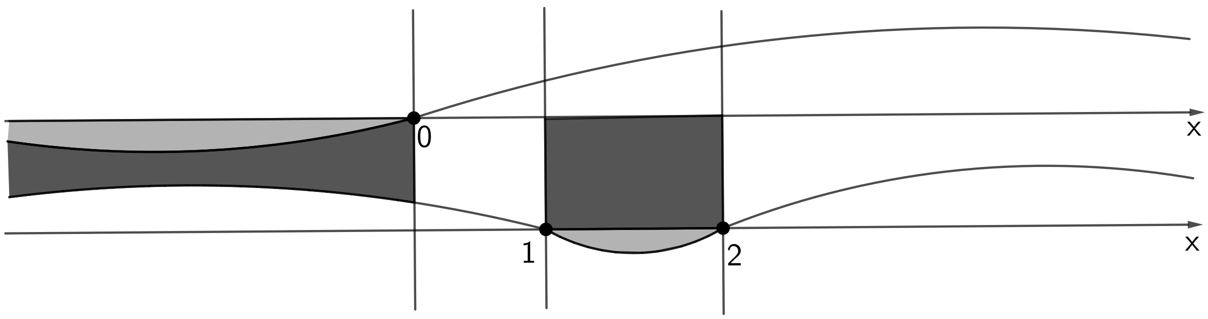

Рис. 3.

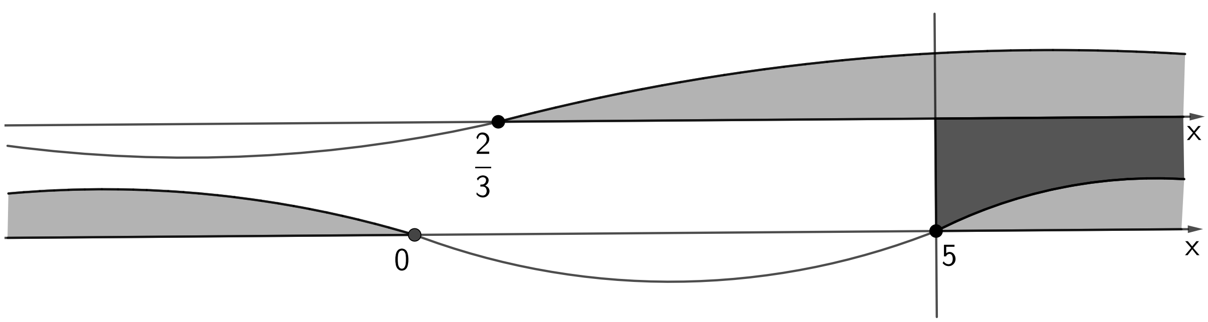

Рис. 4.

Таким образом, окончательный ответ таков: $x \leqslant 0$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant 5$.

Ответ: $x \leqslant 0$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant 5$.

В заключение этого раздела приведем еще одно соображение в пользу снятия модулей.

Некоторые школьники рассуждают так. «Да, снятие модулей технически проще, чем раскрытие модулей по случаям. Но зато разбор случаев *универсален*: этим методом я смогу решить *любую* задачу с модулями, а технические сложности в вычислениях меня не пугают: считаю я хорошо.» Следует признать определенную долю истины в этом высказывании: действительно, снятие модулей менее универсально и работает плохо, если модулей два или больше (и они не вложены друг в друга). Однако ключевым моментом здесь является *ошибочное* утверждение о том, что *любая* задача с модулями может быть решена разбором знаков подмодульного выражения! И здесь нельзя не привести следующий пример.

Пример 5. Решить неравенство

$$|x^3 - 2x^2 + 2| \geqslant 2 - 3x.$$

Сразу становится вида сложность этой задачи: под модулем стоит не квадратный многочлен, а *кубический*! Более того, корни этого кубического многочлена *невозможно* найти методами алгебры 8 класса (а даже если бы это и получилось, работать с возникшими выражениями все равно было бы почти невозможно). Поэтому в данной задаче «Точки и кусочки» *неприменимы в принципе*! Невозможно учесть корни данного кубического многочлена при решении возникающих неравенств без модуля. Вот почему важно знать и другие методы избавления от модулей: они могут оказать не только более быстрыми, но и единственно возможными!

Попробуем теперь снять модуль так, как мы умеем. Возникнет следующая совокупность:

$$|x^3 - 2x^2 + 2| \geqslant 2 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 2 \geqslant 2 - 3x \\ x^3 - 2x^2 + 2 \leqslant -(2 - 3x) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} x^3 - 2x^2 + 3x \geqslant 0 \\ x^3 - 2x^2 - 3x + 4 \leqslant 0 \end{array}\right. .$$

Да, кубические многочлены остались (ну а куда бы они делись?..), но зато модули пропали! Более того, видно, что первый многочлен, хоть и кубический, но зато легко раскладывается на множители: достаточно просто вынести x за скобку. Со вторым многочленом придется повозиться, но чувствуется. что мы на верном пути!

Учитывая, что первое неравенство видно как решать, разберем два неравенства по-отдельности.

Первое неравенство. Имеем:

$$x^3 - 2x^2 - 3x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 2x + 3) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 0,$$

т.к. $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$. Поэтому решение первого неравенства выглядит очень просто: $x \geqslant 0$.

Второе неравенство. Здесь нам придется разложить на множители кубический многочлен. Легче всего это сделать, угадав его корень и воспользовавшись теоремой Безу: если f — многочлен и $f(a) = 0$, то $f(x) = (x - a)f_1(x)$ для некоторого многочлена $f_1(x)$. Попробуем угадать корень у нашего многочлена $x^3 - 2x^2 - 3x + 4$. Перебор корней полезно, во-первых, начинать с $x = \pm 1$, а во-вторых, искать корни среди делителей свободного члена (который в нашем случае равен 4). Несложно видеть, что $x = 1$ является корнем, поэтому

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = (x - 1)(\ldots).$$

Но что должно быть написано в скобках?

Понять это можно двумя способами. Прежде всего, можно честно поделить многочлен $x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ на $x - 1$ в столбик, каждый раз убивая старшую степень с остатке. Но мы поступим хитрее. Во-первых, ясно, что в скобках стоит квадратный трехчлен, т.к. сумма степеней множителей в правой части равна 3. Кроме того, ясно, что старший член этого квадратного трехчлена равен 1 (поскольку старший член произведения — это произведения старших членов). Далее, можно также найти свободный член: он равен -4 (ибо свободный член произведения равен произведению свободных членов).

В итоге мы, ничего не сделав, уже почти нашли вторую скобку:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = (x - 1)(x^2 + \ldots x - 4).$$

Осталось поймать коэффициент при x. Ну а здесь уже нужно немного посчитать. Давайте попробуем мысленно раскрыть скобки в правой части и посмотреть на коэффициент при x^2. Он будет равен $(-1) + \ldots$. Но с другой стороны, он же равен -2. Значит, коэффициент при x во второй скобке равен $-2 - (-1) = -1$, и наше разложение выглядит так:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = (x - 1)(x^2 - x - 4).$$

Теперь решение второго неравенства не представляет проблем:

$$(x-1)(x^2+\ldots x-4\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0,$$

где $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-4)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. Заметим, что

$$x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2}<0<1<\frac{1+4}{2}<\frac{1+\sqrt{17}}{2}=x_2,$$

поэтому змейка будет выглядеть так:

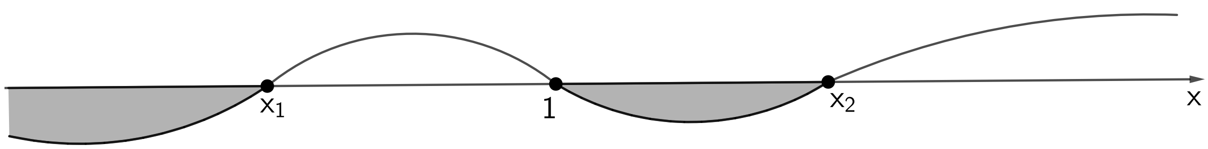

Рис. 5.

Таким образом, решение второго неравенства выглядит так: $x\leqslant x_1$, $1\leqslant x\leqslant x_2$.
Осталось объединить две диапазона решений и получить окончательный ответ.
Ответ: $x\leqslant\frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x\geqslant 0$.

Перед тем, как переходить к решению задач, соберем все способы снятия модуля воедино.

- $|f|<g\Leftrightarrow -g<f<g$
- $|f|=g\Leftrightarrow \begin{cases} f=\pm g \\ g\geqslant 0\end{cases}$
- $|f|>g\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f>g \\ f<-g\end{array}\right.$

3. Задачи на снятие модулей

Во всех задачах требуется решить уравнение или неравенство.

1. $|x^2-1|+x+1=0$.

2. $|x^2-3x|=2x-4$.

3. $|x^2-2x-1|-x+1=0$.

4. $\begin{cases} |x^2-4y+3|+y=1 \\ 2x+2y=1\end{cases}$

5. $3|x-1|>x+3$.

6. $|2x-1|>\frac{1}{x-2}$.

7. $|x^2-2x-3|<3x-3$.

8. $|x^2-3x+1|<x-2$.

9. $|x^2+3x|+x^2-2\geqslant 0$.

10. $\big||x^2+3x-8|-x^2\big|\geqslant 8-x$.

11. $\big||x^3-x-1|-5\big|\geqslant x^3+x+8$.

4. Домножение на сопряженное

В прошлом разделе мы научились работать с уравнениями и неравенствами вида $|f| = g$, $|f| < g$ и $|f| > g$. Возникает вопрос: что делать, если мы навесим модуль еще и на правую часть? Т.е. рассмотрим теперь уравнение $|f| = |g|$ и неравенства $|f| < |g|$, $|f| > |g|$? Конечно, можно было бы снять сначала модуль слева, а затем — справа. Но видно, что это уже довольно трудно реализовать технически: слишком много возникает уравнений и неравенств. Хотелось бы поступить проще...

Оказывается, что такой более простой способ действительно есть! Давайте посмотрим на то, как он работает, сначала на примере уравнения $|f| = |g|$. Чтобы решить его, достаточно лишь геометрического смысла модуля! В самом деле, напомним, что $|a|$ — это расстояние от точки a до точки 0 на координатной прямой. Уравнение $|f| = |g|$ говорит, что нам нужно найти условия, при которых числа f и g равноудалены от точки 0. Понятно, что это возможно только в двух случаях: либо эти числа совпадают, т.е. $f = g$, либо они отличаются знаком, т.е. $f = -g$. Таким образом, уравнение $|f| = |g|$ равносильно паре уравнений $f = \pm g$. Вот и все!

Оказывается, что с неравенствами дело обстоит значительно хитрее, и здесь просто геометрический смысл модуля нам не поможет. точнее говоря, используя его, можно все-таки избавиться от модулей, но это будет очень долго и громоздко. Поэтому здесь мы применим принципиально другую идею (которая. кстати, помогает решить и уравнение $|f| = |g|$) — *домножение на сопряженное.*

Попробуем решить неравенство $|f| < |g|$ (неравенство «>» решается абсолютно аналогично). Перенесем $|g|$ налево, чтобы в левой части у нас возникла разность модулей. Получится неравенство $|f| - |g| < 0$. А теперь *умножим* обе части нашего неравенства на величину $|f| + |g|$! Такое выражение называется *сопряженным к* $|f| - |g|$, и, как мы сейчас увидим, перемножать сопряженные выражения очень полезно.

Во-первых, давайте поймем, какое неравенство мы получим. В правой части у нас останется 0 (эта идея хорошо нам знакома по методу интервалов: мы хотим следить только за знаками выражения, поэтому оставляем справа 0), а в левой возникнет разность квадратов. Но понятно, что $|f|^f = f^2$ и $|g|^2 = g^2$, поэтому в левой части возникнет просто разность квадратов $f^2 - g^2$. В итоге наше неравенство запишется в виде $f^2 - g^2 < 0$, а его уже легко решить методом интервалов: левая часть очень легко раскладывается на множители — $(f - g)(f + g) < 0$.

Теперь давайте поймем, является ли такой переход с домножением на сопряженное равносильным преобразованием (т.е. не изменится ли в результате такого действия множество решений). Заметим, что $|f| \geqslant 0$ и $|g| \geqslant 0$, поэтому $|f| + |g| \geqslant 0$, и мы вроде бы домножаем неравенство на положительную величину, а значит, совершаем равносильное преобразование...

На самом деле так будет *практически всегда.* Но все же есть исключения. Дело в том, что сумма $|f| + |g|$ иногда может равняться 0: когда $f = g = 0$. Это скорее всего произойдет в конечном числе точек, которые легко выкинуть из ответа, но тем не менее полезно помнить, что иногда модуль может обратиться в 0, и такие случаи нужно контролировать отдельно. Поэтому на практике перед тем, как домножать на сопряженное, полезно убедиться, что у слагаемых $|f|$ и $|g|$ нет общих нулей. Обычно f и g — многочлены, поэтому, если у них есть общий корень, его можно просто вынести за скобку и не домножать на него.

Обратите внимание, что домножение на сопряжено позволяет единообразно справиться с модулями во всех трех случаях: $|f| = |g|$, $|f| < |g|$ и $|f| > |g|$. Связано это с тем, что мы боремся не столько с самим неравенством, сколько с выражением $|f| - |g|$, которое превращается в разность квадратов $f^2 - g^2$ в результате домножения на сопряженное. Иногда в задачах могут встречаться такие разности модулей, скомбинированные с какими-то другими выражениями. В таком случае домножение на сопряженное позволит существенно упростить неравенство, а иногда и приведет к полному его решению.

Замечание 1. Есть и еще один подход к избавлению от модулей в неравенствах вида $|f| \vee |g|$. Заключается он в операции *возведения в квадрат*. Т.е. мы просто возводим в квадрат исходное неравенство и получаем равносильное ему неравенство $f^2 \vee g^2$. Обратите внимание, что операция возведения в квадрат действительно приводит к равносильному неравенству, поскольку и левая, и правая части исходного неравенства были *неотрицательны*. Это важное ограничение, поскольку в случае наличия в неравенстве отрицательных величин возведение в квадрат может привести к противоречию: $1 > -2$, но $1^2 < (-2)^2$. Поэтому возводить в квадрат неравенства вида $|f| > g$ *нельзя*!

Пример 6. Решить неравенство $|x^2 - 8x + 15| \leqslant |15 - x^2|$.

Перенесем все модули в левую часть, домножим на сопряженное (обратите внимание, что для нестрогих неравенств такой переход просто равносилен и не требует никаких ограничений, т.к. если $f = g = 0$, то такие точки являются решением исходного неравенства) и применим метод интервалов:

$$|x^2 - 8x + 15| \leqslant |15 - x^2| \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 8x + 15| - |x^2 - 15| \leqslant 0 \;\Big|\cdot (|x^2 - 8x + 15| + |x^2 - 15|) \quad \Leftrightarrow$$
$$\big((x^2 - 8x + 15) - (x^2 - 15)\big)\big((x^2 - 8x + 15) + (x^2 - 15)\big) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-8x + 30)(x^2 - 4x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(4x - 15)x(x - 4) \geqslant 0.$$

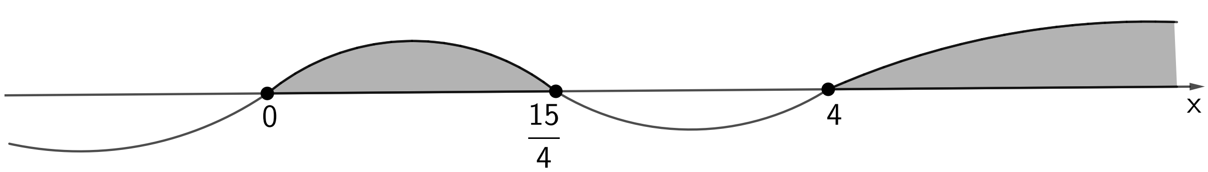

Рис. 6.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant \frac{15}{4}$, $x \geqslant 4$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}.$$

Обратите внимание, что здесь выражение $|f| - |g|$ возникает сразу несколько раз, причем в составе сложной дроби. Поэтому без домножения на сопряженные нам не обойтись. Заметим, что нам нужно убить модули в двух разностях, а значит, нам нужно два сопряженных выражения. Умножим обе части неравенства на положительную дробь $\frac{x-4|+|x-1||}{|x-3|+|x-2|}$ (обратите внимание что эта дробь строго положительна, поскольку у подмодульных выражений нет общих нулей).

В результате получим следующую цепочку равносильных преобразований:

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-4)^2-(x-1)^2}{(x-3)^2-(x-2)^2}<\frac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|} \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{-6x+15}{-2x+5}<\frac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|}>3\\ x\neq\dfrac{5}{2}\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}|x-1|>2|x-4|\\ x\neq\dfrac{5}{2},4\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}2|x-4|-|x-1|<0 \;\Big|\cdot(2|x-4|+|x-1|)\\ x\neq\dfrac{5}{2},4\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\big(2(x-4)-(x-1)\big)\big(2(x-4)+(x-1)\big)<0\\ x\neq\dfrac{5}{2},4\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\big(x-7)(x-3)\big)<0\\ x\neq\dfrac{5}{2},4\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$3<x<4,\quad 4<x<7.$$

Ответ: $3<x<4$, $4<x<7$.

Перед тем, как переходить к решению задач, зафиксируем еще раз наше действие:

$$|f|\vee|g| \quad\Leftrightarrow\quad |f|-|g|\vee 0 \;\Big|\cdot(|f|+|g|) \quad\Leftrightarrow\quad f^2-g^2\vee 0.$$

5. Задачи на домножение на сопряженное

12. $|x^2-13x+35|=|35-x^2|$.

13. $|x^2+x-3|=|5x-4|$.

14. $|x^2+10x+16|\geqslant|x^2-16|$.

15. $\left|\frac{x-1}{x-2}\right|=\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$.

16. $\left|\frac{x}{10}-\frac{1}{5}\right|\geqslant\left|\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right|$.

17. $\frac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|}<\frac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.

6. Неравенство треугольника

В заключительном для этого пособия методе мы попробуем разобраться с некоторыми уравнениями и неравенствами, содержащими в себе сразу три модуля! Необходимо сразу оговориться, что данный метод на практике применяется не очень часто, однако так, где его можно использовать, он очень эффективен и быстр. Называется этот метод «*Неравенство треугольника*».

Откуда треугольники берутся в задачах с модулями? Давайте вспомним понятие вектора из курса геометрии и понятие *модуль вектора* как его длины. Да, одно и то же слово «модуль» в алгебре и геометрии обозначают, казалось бы, совершенно разные вещи, но между ними можно провести полезную параллель.

В геометрии хорошо известно *неравенство треугольника*: в треугольнике сумма двух сторон больше третьей. Вспоминая про правило треугольника сложения векторов и обозначение $|\overline{x}|$ модуля (или длины) вектора $\overline{x}$, можно написать такое неравенство: для любых двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ верно неравенство $|\overline{a}|+|\overline{b}|\geqslant|\overline{a}+\overline{b}|$. Обратите внимание, что равенство здесь может достигаться в случае, когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны (т.е. параллельны одной прямой).

Возникает вопрос: а верно ли соответствующее неравенство *для чисел* a и b? Что будет, если стереть стрелочки над векторами? Справедливо ли неравенство $|a| + |b| \geqslant |a + b|$?

Оказывается, что это неравенство верно! Оно также называется *неравенством треугольника*, хотя теперь мы его формулируем для вещественных чисел. Кроме того, нам потребуется еще одно важное усиление этого неравенства, которого нет в его геометрическом аналоге. А именно, нам будет важно знать, когда это неравенство обращается в равенство, т.е. когда $|a|+|b| = |a+b|$. Сформулируем соответствующее утверждение.

Предложение 1 (Неравенство треугольника)**.** Для любых вещественных чисел a и b справедливо неравенство $|a| + |b| \geqslant |a + b|$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда числа a и b одного знака, т.е. когда $ab \geqslant 0$.

Доказательство. Чтобы доказать неравенство $|a|+|b| \geqslant |a+b|$, возведем его в квадрат. Как мы уже отмечали выше, это равносильное преобразование, поскольку левая и правая части нашего неравенства неотрицательны. С другой стороны, возведение в квадрат поможет нам избавиться от большого количества модулей.

Имеем:

$$|a|+|b| \geqslant |a+b| \quad \Leftrightarrow \quad (|a|+|b|)^2 \geqslant |a+b|^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2+2|a||b|+b^2 \geqslant a^2+2ab+b^2 \quad \Leftrightarrow \quad |ab| \geqslant ab.$$

Мы получили верное неравенство (модуль всегда не меньше своего аргумента), а заодно поняли, что равенство достигается, когда модуль в последнем неравенстве раскрывается со знаком «+», т.е. когда $ab \geqslant 0$, что и требовалось доказать. $\square$

У неравенства треугольника в геометрии есть еще одна форма записи: $\big||\bar{a} - \bar{b}|\big| \leqslant |\bar{a} - \bar{b}|$ (модуль разности двух сторон не больше третьей стороны). Его аналог для чисел также есть.

Предложение 2 (Второе неравенство треугольника)**.** Для любых вещественных чисел a и b справедливо неравенство $\big||a|-|b|\big| \geqslant |a-b|$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда числа a и b одного знака, т.е. когда $ab \geqslant 0$.

Доказательство этого неравенства абсолютно аналогично доказательству первого неравенства треугольника.

Теперь посмотрим, как неравенства треугольника работают в конкретных задачах. Обычно идея заключается в том, чтобы обнаружить в одном выражении сумму или разность двух других подмодульных выражений. Тогда, переобозначая эти подмодульные выражения, мы сведем задачу к неравенству вида $|a|+|b| \leqslant |a+b|$ или $|a|+|b| = |a+b|$. И в первом, и во втором случае согласно неравенству треугольника, справедливо неравенство $|a|+|b| \geqslant |a+b|$, поэтому для выполнения исходного неравенства необходимо и достаточно, чтобы в неравенстве треугольника достигалось равенство (вот для чего оно нам было нужно!). Поэтому вместо сложных раскрытий модуле мы получаем одно несложное неравенство $ab \geqslant 0$, которое легко решить методом интервалов.

Как научиться замечать подобные комбинации выражений — отдельный вопрос. Часто помогает такой прием: мысленно уберем модули (или, что то же самое, раскроем их со знаком +) и посмотрим, что получится. Если многие слагаемые сокращаются, это может означать, что стоит попробовать поискать замену, сводящую задачу к неравенству треугольника. Иногда, чтобы добиться сокращения каких-то слагаемых, полезно перед раскрытием модулей поменять знак подмодульного выражения.

Также иногда встречаются более простые неравенства вида $|a|+|b| \leqslant a+b$. Здесь достаточно заметить, что $|a| \geqslant a$ и $|b| \geqslant b$, поэтому на самом деле $|a| + |b| \geqslant a + b$, а равенство достигается лишь при a, $b \geqslant 0$. Такие задачи позволяют научиться замечать различные трюки, связанные с комбинированием подмодульных выражений.

Пример 8. Решить неравенство $|x^2-2x|+|x^2-1| \leqslant 1-2x$.

Заметим, что

$$|x^2-2x|+|x^2-1| = |1-x^2|+|x^2-2x| \geqslant (1-x^2)+(x^2-2x) = 1-2x,$$

т.к. $|a| \geqslant a$ при всех вещественных a. Значит, исходное неравенство должно обращаться в равенство. А это возможно лишь при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} 1-x^2 \geqslant 0 \\ x^2-2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) \leqslant 0 \\ x(x-2) \geqslant 0 \end{cases}$$

Применим метод интервалов.

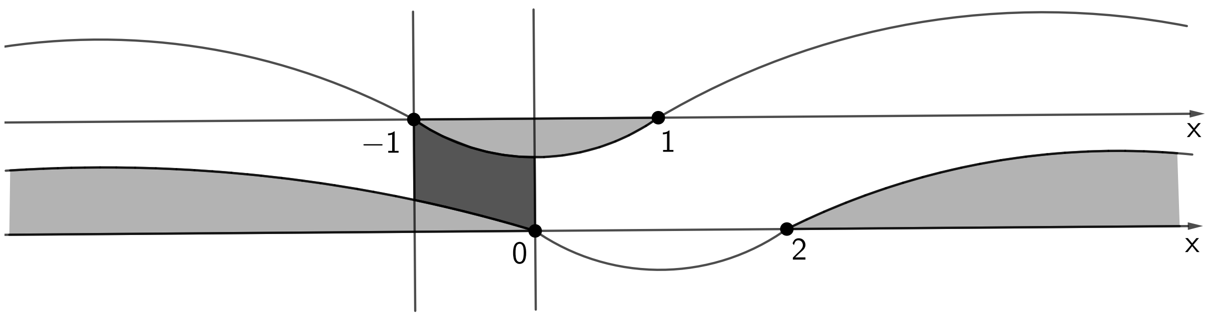

Рис. 7.

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

Теперь рассмотрим пример посложнее.

Пример 9. Решить неравенство $\big||2+x-x^2|-|x+1|\big| \geqslant |x^2-2x-3|$.

Внешний вид нашего неравенства напоминает второе неравенство треугольника: $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$. Попробуем скомбинировать из двух правых подмодульных выражений третье.

Если просто раскрыть модули, то получится $(2+x-x^2)-(x+1) = -x^2+1$ — совсем не то, что нам нужно. Давайте попробуем поменять знак первого подмодульного выражения. Почему так? Потому, что в последнем модуле x^2 идет со знаком «+», а раз так, то разумно попробовать добиться этого и в левой части.

Итак, получаем: $(-2-x+x^2)-(x+1) = -(x^2-2x-3)$ — почти то, что нам нужно! Только знак выражения другой. Но от этого легко избавиться, поменяв слагаемые $|2+x-x^2|$ и $|x+1|$ в левой части.

Итак, мы готовы применить второе неравенство треугольника:

$$\big||2+x-x^2|-|x+1|\big| = \big||-x-1|-|2+x-x^2|\big| \leqslant |(-x-1)-(2+x-x^2)| = |x^2-2x-3|.$$

Поскольку исходное неравенство смотрит в другую сторону, оно обязано обращаться в равенство. Как мы помним, в равенство оно обращается тогда и только тогда, когда

$$(-x-1)(2+x-x^2) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2(x-2) \geqslant 0.$$

Применим метод интервалов:

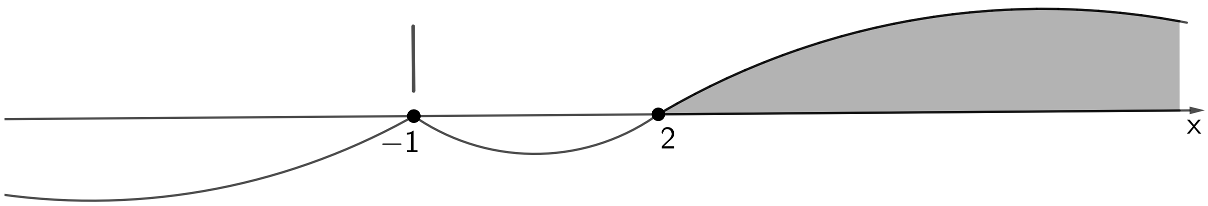

Рис. 8.

Ответ: $x = -1$, $x \geqslant 2$.

7. Задачи на неравенство треугольника

18. $|2x-15| = 22 - |2x+7|$.

19. $|5x-13| - |6-5x| = 7$.

20. $|x^2-4| + |9-x^2| = 5$.

21. $\big||1-x^2| - |x^2-3x+2|\big| \geqslant 3|x-1|$.

22. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy уравнением $2|x+2| + |y| + |2x-y| = 4$.