«Царская дорога» к окружности и прямой Эйлера

П. В. Бибиков[1]

1 Введение

Окружность Эйлера и прямая Эйлера являются жемчужинами элементарной геометрии. Они упорядочивают положение самых важных и фундаментальных замечательных точек в треугольнике и кладут начало целой серии исследований, связанных с более сложными объектами и понятиями. Кроме того, доказательства соответствующих утверждений не требуют никаких знаний, выходящих за рамки школьного курса, и во многих физико-математических классах и кружках окружность и прямая Эйлера изучаются столь же основательно, как вписанные углы, теоремы Чевы и Менелая и т.д.

Как правило, окружность и прямая Эйлера проходятся в 9 классе, редко раньше (отметим, правда, что в учебнике А. Погорелова окружность Эйлера приводится в конце §6 8 класса, а прямая Эйлера вообще отсутствует). Считается, что для понимания доказательств соответствующих теорем школьники уже должны хорошо владеть самыми разнообразными фактами и понятиями из курса геометрии: вписанными углами, гомотетией, подобием и т.д. При этом теоремы об окружности и прямой Эйлера преподносятся как финальный результат: смотрите, какие утверждения мы теперь умеем доказывать! То есть получается, что окружность и прямая Эйлера оторваны от самого процесса освоения нового материала, они — лишь следствие, причем находящееся где-то в стороне от школьного курса, нужное лишь в силу своей красоты и применения в олимпиадных задачах.

Целью данной статьи является знакомство читателя с другим подходом к изложению этих теорем, лишенным указанных недостатков. При таком подходе знакомство с окружностью и прямой Эйлера происходит уже в 7–8 классе (сам автор предлагал школьникам доказать утверждения об окружности Эйлера в середине 7 класса, а о прямой Эйлера — в конце 7 класса), что представляется чрезвычайно важным, поскольку именно знакомство с подобными теоремами и доказательствами повышает уровень ребят (и геометрический, и культурный). Зачастую в 7 классе отсутствуют содержательные утверждения, требующие многоходовых рассуждений и использующие в доказательствах факты из различных областей геометрии. В основном на первых порах знакомства с геометрией основное внимание уделяется отработке базовых навыков и умений: заметить равные треугольники, вычислить угол с помощью суммы углов треугольника, доказать параллельность прямых и т.д. Подавляющее большинство этих задач являются «одноходовками» и не способствуют развитию геометрической культуры у школьников.

Еще одной неприятной особенностью задач, часто предлагаемых в курсе геометрии 7–8 класса, является их «вычурность». Часто учитель просто формулирует задачу, не уделяя внимания вопросам типа «откуда эта задача взялась», «как она связана с другими задачами» и уж тем более «как догадаться до этой самой задачи»?

Таким образом, серьезной проблемой в преподавании геометрии в 7–8 классах является отсутствие глубоких и содержательных результатов, последовательно осваивая которые, школьники могли бы существенно повысить как свой уровень владения материалом, так и свои навыки выстраивать сложные многоходовые рассуждения, используя весь арсенал имеющихся у них средств.

На наш взгляд, приводимый в этой статье сюжет об окружности и прямой Эйлера, а также ряда других тесно связанных с ними фактов может восполнить этот пробел и дать возможностью познакомиться с содержательными геометрическими результатами уже на ранних этапах

[1]Лицей «Вторая школа»; e-mail tsdtp4u@proc.ru

освоения геометрии.

Есть и еще один удивительный момент: при предлагаемом подходе к доказательству теорем об окружности и прямой Эйлера дорога к ним лежит не в стороне от основного курса теории (принятого, например, в учебнике А. Погорелова), а, наоборот, расширяет, дополняет, углубляет и связывает между собой материал всего курса 7 и начала 8 класса. Удивительно, что результаты, лежащие на этой дороге, могут быть доказаны без привлечения такой мощной техники как вписанные и центральные углы, гомотетия и подобие, и в то же время эти доказательства не искусственны! Они проясняют суть дела, но с совершенно неожиданной стороны, позволяя помимо всего прочего продемонстрировать конструкции, не всегда знакомые даже олимпиадникам.

Поэтому мы и назвали эту дорогу к окружности и прямой Эйлера «*царской*». Представляется чрезвычайно важным дать школьникам младших (7–8) классов самостоятельно пройтись по этой дороге.

2 Опорная задача «Медиана в прямоугольном треугольнике»

Мы предполагаем, что школьник уже владеет материалом, соответствующим §1–§6 учебника Погорелова (а именно: признаки равенства треугольников, равнобедренный треугольник, сумма углов треугольника, параллельные прямые, геометрические места точек, окружность, параллелограммы, трапеции, средние линии).

Мы начнем наш путь с доказательства опорной задачи «Медиана в прямоугольном треугольнике».

Рассмотрим треугольник ABC. Пусть точка M — середина стороны AB. Имеет место следующее утверждение.

Опорная задача. *Треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом C тогда и только тогда, когда $CM = AB/2$.*

Упражнение. Докажите часть «и только тогда», т.е. докажите, что если $CM = AB/2$, то $\angle C = 90°$ (см. рис. 1).

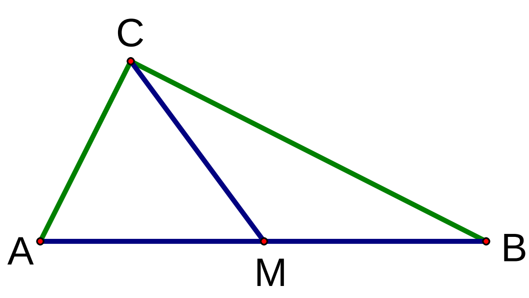

Рис. 1:

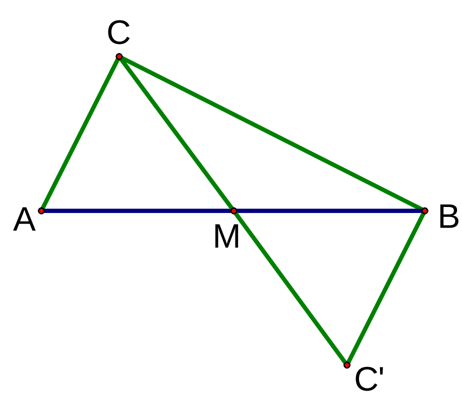

Рис. 2:

Доказательство. Остается доказать часть «тогда». Как ни странно, это утверждение значительно более трудно! Для доказательства нам придется воспользоваться следующим дополнительным построением (часто это построение выделяют в другую опорную задачу): *продлением медианы на свою длину.*

Итак, рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Продлим медиану CM на свою длину за точку M и рассмотрим получившуюся точку C' (см. рис. 2). $\triangle ACM = \triangle BC'M$ по двум сторонам и углу между ними, откуда следует, что отрезки AC и BC' равны и лежат на параллельных прямых. Тогда $\angle CBC' = 90^\circ$ и $\triangle ABC = \triangle C'CB$ по двум катетам. Наконец, получаем, что $AB = CC'$, а значит, $CM = AB/2$. □

Каким образом мы будем использовать эту опорную задачу? Оказывается, она тесно связана с окружностью!

Упражнение. Докажите, что диаметр окружности виден из любой ее точки под прямым углом (см. рис. 3).

Упражнение. Наоборот, докажите, что если в окружности проведен диаметр AB и на плоскости выбрана точка C такая, что $\angle ACB = 90^\circ$, то точка C лежит на данной окружности.

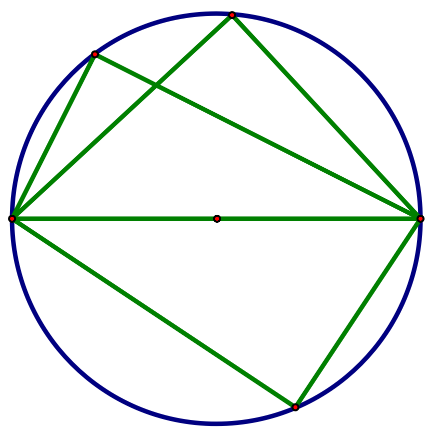

Рис. 3:

По сути, оба этих упражнения являются переформулировкой нашей опорной задачи в терминах описанной окружности прямоугольного треугольника. Поэтому ее еще формулируют так: *центр описанной окружности прямоугольного треугольника является серединой гипотенузы.*

Теперь посмотрим, как этот важный факт работает на практике.

2.1 Окружности и высоты

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Для простоты мы всегда будем рисовать его остроугольным, однако все утверждения, которые мы будем формулировать в дальнейшем, справедливы и для прямо- и тупоугольного треугольников, причем доказательства не меняются ни в одной букве.

Проведем в треугольнике высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H.

Утверждение 1. *Четверка точек* (B, C_1, B_1, C) *лежит на одной окружности и четверка точек* (C_1, A, B_1, H) *лежит на одной окружности (см. рис. 4).*

Доказательство. Поскольку доказательства для этих двух четверок аналогичны, мы проведем рассуждение лишь для первой из них. Рассмотрим прямоугольные треугольники BCB_1 и BCC_1 с общей гипотенузой BC (см. рис. 4). Согласно опорной задаче у этих треугольников совпадают описанные окружности (т.к. у этих окружностей одинаковый диаметр), а значит, все их вершины лежат на одной окружности. □

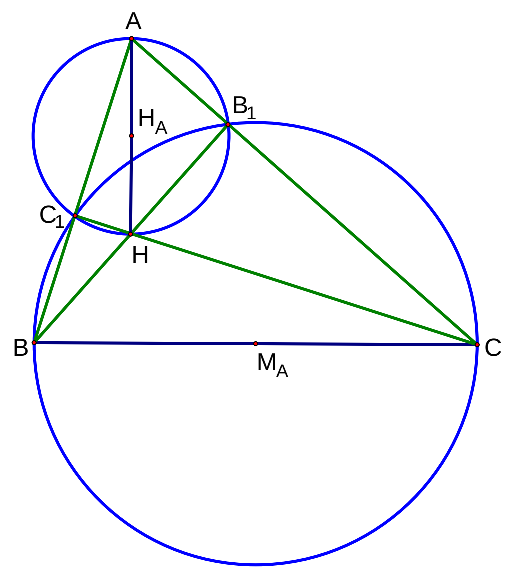

Рис. 4:

Отметим, что эти две окружности в треугольнике обладают многими замечательными свойствами и часто встречаются в задачах. Например, можно доказать, что эти окружности ортогональны (т.е. касательные, проведенные в их точке пересечения, перпендикулярны).

Обозначим через M_A и H_A центры первой и второй окружностей соответственно. Иначе говоря, M_A — середина стороны BC, а H_A — середина отрезка AH. Именно с этими точками и будут связаны наши дальнейшие рассуждения.

2.2 Окружности и биссектрисы

Перед тем как двигаться дальше и переходить непосредственно к окружности Эйлера, мы параллельно рассмотрим еще один сюжет, в некотором смысле двойственный к окружности Эйлера. Как вы могли видеть, в прошлом разделе основную роль играли высоты треугольника. Люди, знакомые с окружностью и прямой Эйлера, знают, что в них также большую роль играют медианы, серединные перпендикуляры и описанная окружность. Но среди всех этих замечательных объектов, связанных с треугольником, загадочным образом не встречаются биссектрисы!

С чем связано это обстоятельство? Ведь если вы посмотрите школьные учебники, то обнаружите, что биссектрисы треугольника двойственны серединным перпендикулярам. В самом деле, вспомним, например, геометрические места точек «серединный перпендикуляр к отрезку» и «биссектриса угла», или теоремы об описанной окружности треугольника и вписанной окружности... Но все же биссектрис среди конструкций, связанных с окружностью Эйлера, не видно...

Сейчас мы покажем, каким образом в сюжете об окружности Эйлера появляются биссектрисы. Для этого мы параллельно с конструкциями предыдущего раздела приведем несколько утверждений, которые затем свяжут биссектрисы треугольника с его окружностью Эйлера.

Итак, рассмотрим теперь треугольник ABC и отметим для него центр I вписанной окружности и центры I_A, I_B, I_C вневписанных окружностей. Напомним, что эти точки лежат на пересечении соответствующих биссектрис внутренних и внешних углов треугольника ABC.

Утверждение 2. *Четверка точек (B, I, C, I_A) лежит на одной окружности и четверка точек (B, C, I_B, I_C) лежит на одной окружности (рис. 5, 6).*

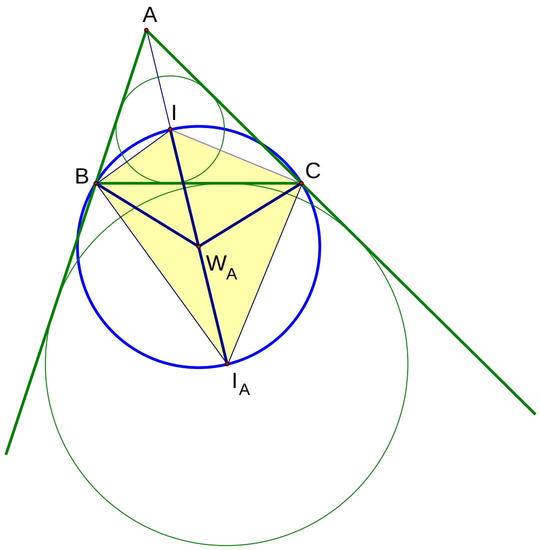

Рис. 5:

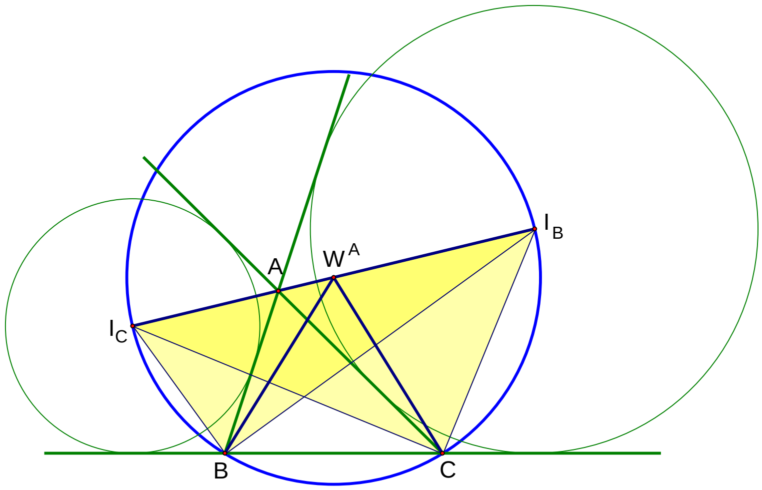

Рис. 6:

Доказательство. Мы опять проведем доказательство только для первой четверки точек, поскольку для второй рассуждения аналогичны. Рассмотрим отрезки BI и BI_A (рис. 5). Они являются биссектрисами смежных углов (внутреннего и внешнего угла треугольника ABC), поэтому они образуют прямой угол (кстати, это еще одна опорная задача!). Поэтому треугольник II_AB — прямоугольный. Аналогично, треугольник II_AC — прямоугольный. И снова мы получаем два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, а значит, по опорной задаче «Медиана в прямоугольной треугольнике» все их вершины лежат на одной окружности. □

Не правда ли, утверждения 1 и 2 похожи? Чем можно объяснить это сходство? Будем двигаться дальше, и ответы на эти вопросы со временем появятся. Пока лишь введем еще два обозначения: обозначим через W_A центр первой окружности, а через W^A — второй. Иначе говоря, W_A — это середина отрезка II_A, а W^A — середина отрезка I_BI_C. Четверку равных отрезков $W_AB = W_AC = W_AI = W_AI_A$ называют *первой лапкой* (см. рис. 5), а четверку равных отрезков $W^AB = W^AC = W^AI_B = W^AI_C$ — *второй лапкой* (см. рис. 6).

3 Окружность Эйлера

Наконец мы подошли к первому значимому результату — теореме об окружности Эйлера. Как ни странно, ведут к нему два пути. Первый связан с высотами и медианами в треугольнике, а второй — с биссектрисами! И если первая конструкция наверняка знакома многим любителям геометрии, то вторая конструкция может поначалу удивить.

3.1 Высоты и середины

Итак, сформулируем первый вариант теоремы об окружности Эйлера.

Теорема 1. *Основания высот треугольника, середины его сторон и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности, которая называется окружностью Эйлера (см. рис. 7).*

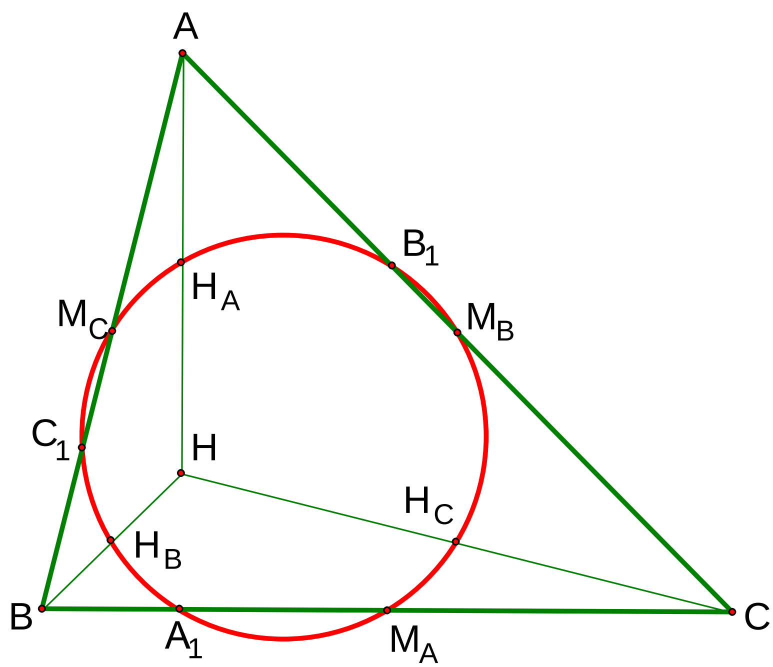

Рис. 7:

Прежде чем переходить к доказательству, зафиксируем еще раз все необходимые обозначения.

- A_1, B_1, C_1 — основания высот $\triangle ABC$,
- M_A, M_B, M_C — середины сторон BC, AC и AB,
- H_A, H_B, H_C — середины отрезков AH, BH, CH.

Доказательство. Мы разобьем доказательство на три пункта. Первый из них — самый сложный технически.

1. Докажем, что точки B_1, C_1, H_A, M_A лежат на одной окружности Ω с диаметром M_AH_A (см. рис. 8). Как можно догадаться, что именно с этих точек нужно начинать наши рассмотрения? Но ведь именно эти точки фигурировали в утверждении 1! Вполне логично начать с уже знакомых нам объектов.

Докажем, что треугольник $M_AH_AC_1$ — прямоугольный с прямым углом C_1. Если нам это удастся, то аналогичными рассуждениями можно будет доказать, что треугольник $M_AH_AB_1$ также прямоугольный с прямым углом B_1, а дальше работает уже хорошо знакомая нам по утверждениям 1 и 2 конструкция с двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой.

По опорной задаче треугольники AC_1H_A и BC_1M_A — равнобедренные. Значит, $\angle H_AAC_1 = \angle H_AC_1A$ и $\angle M_ABC_1 = \angle M_AC_1B$. Сложим эти два равенства и заметим, что слева получилась сумма острых углов прямоугольного треугольника ABA_1! Значит, $\angle H_AC_1A + \angle M_AC_1B = 90°$. По сумме смежных углов мы немедленно находим, что $\angle M_AC_1H_A = 90°$.

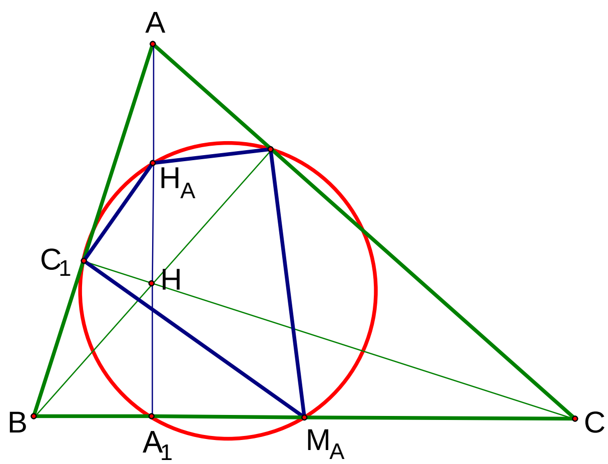

Рис. 8:

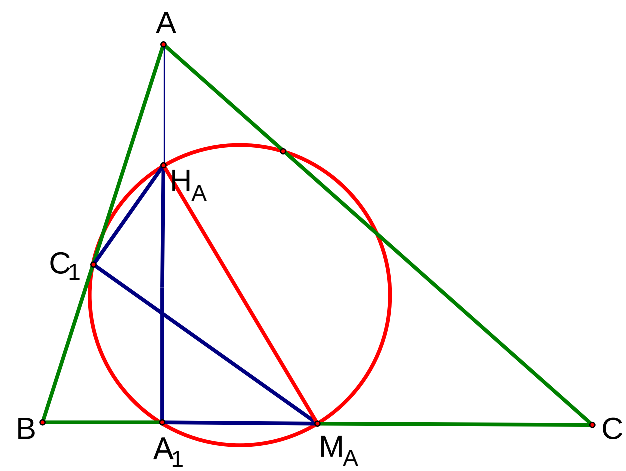

Рис. 9:

Абсолютно аналогичными рассуждениями (советуем их провести) доказывается, что $\angle M_AB_1H_A = 90°$, и мы получаем два прямоугольных треугольника $M_AH_AC_1$ и $M_AH_AB_1$ с общей гипотенузой M_AH_A. Осталось применить опорную задачу.

2. Теперь докажем, что на окружности Ω лежит точка A_1 — основание третьей высоты треугольника ABC. Это почти очевидно, если посмотреть на рисунок 9: ведь у прямоугольного треугольника $M_AH_AA_1$ гипотенуза M_AH_A совпадает с диаметром окружности Ω!

3. Наконец, докажем, что оставшиеся четыре точка лежат на окружности Ω. Для этого заметим, что на Ω лежат все основания высот A_1, B_1, C_1, а также две середины M_A и H_A. Но абсолютно аналогичным образом можно доказать, что на одной окружности лежат все основания высот A_1, B_1, C_1 и две другие середины M_B и H_B («соответствующие» вершине B). Так как через три точки A_1, B_1, C_1 можно провести только одну окружность, то эти две окружности совпадают. Поэтому на Ω лежат середины M_B и H_B и, аналогично, середины M_C и H_C. Тем самым наше доказательство закончено. □

Выше мы говорили, что биссектрисы треугольника ABC не связаны с окружностью Эйлера. На самом деле связь есть, причем совершенно замечательная! Открыта она была немецким математиком К. Фейербахом, и в честь этого открытия окружность Эйлера иногда называют окружностью Фейербаха.

Теорема 2. *Окружность Эйлера касается вписанной окружности треугольника и трех его вневписанных окружностей.*

К сожалению, все известные доказательства этой теоремы достаточно сложны, поэтому мы не будем доказывать эту теорему, отослав заинтересованного читателя к статье В. Протасова «Вокруг теоремы Фейербаха» (Квант, №9, 1992).

3.2 Лапки и точки W

Теперь обратимся к биссектрисам и точкам W_A и W^A. Каким образом они связаны с окружностью Эйлера? Ответ дает следующая теорема (точнее, ее доказательство).

Теорема 3. *Точки W_A и W^A лежат на описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 10).*

Доказательство. Рассмотрим треугольник $I_AI_BI_C$, образованный центрами вневписанных окружностей треугольника ABC. Заметим, что в этом треугольнике отрезки I_AA, I_BB, I_CC являются высотами! Действительно, например, $I_AA \perp I_BI_C$, поскольку биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны. А значит, *описанная окружность треугольника ABC является окружностью Эйлера треугольника $I_AI_BI_C$*! Поэтому на этой окружности лежат середины сторон $\triangle I_AI_BI_C$, в частности, точка W^A, а также середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, в частности, точка W_A. Все! □

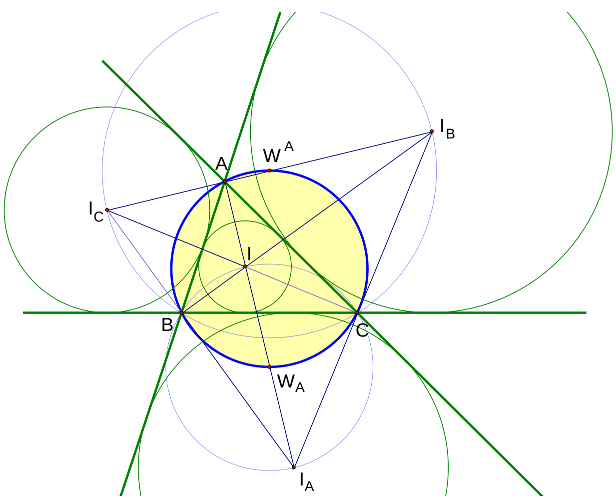

Рис. 10:

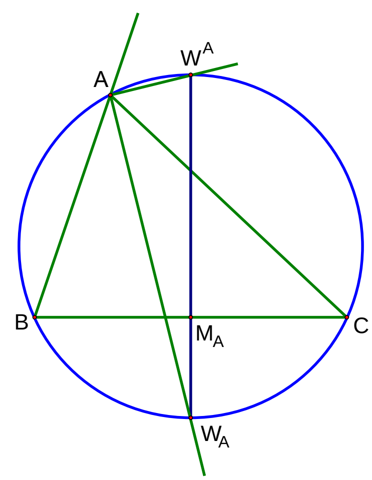

Рис. 11:

Отметим, что традиционное определение точек W_A и W^A несколько отличается от нашего. Однако теперь мы вправе сказать, что эти определения равносильны.

Упражнение. Докажите, что точка пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине A треугольника ABC с его описанной окружностью является точкой W_A, а точка пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине A с описанной окружностью — точкой W^A.

Упражнение. Докажите, что отрезок W_AW^A является диаметром описанной окружности треугольника ABC, проходящем через середину M_A стороны BC (см. рис. 11).

4 Прямая Эйлера

Перейдем теперь к следующему замечательному факту, связанному с именем Л. Эйлера.

Теорема 4. *Точка H пересечения высот, точка M пересечения медиан, центр E окружности Эйлера и центр O описанной окружности треугольника ABC в указанном порядке лежат на одной прямой (называемой прямой Эйлера), причем $HE = EO$ и $HM : MO = 2 : 1$ (см. рис. 12).*

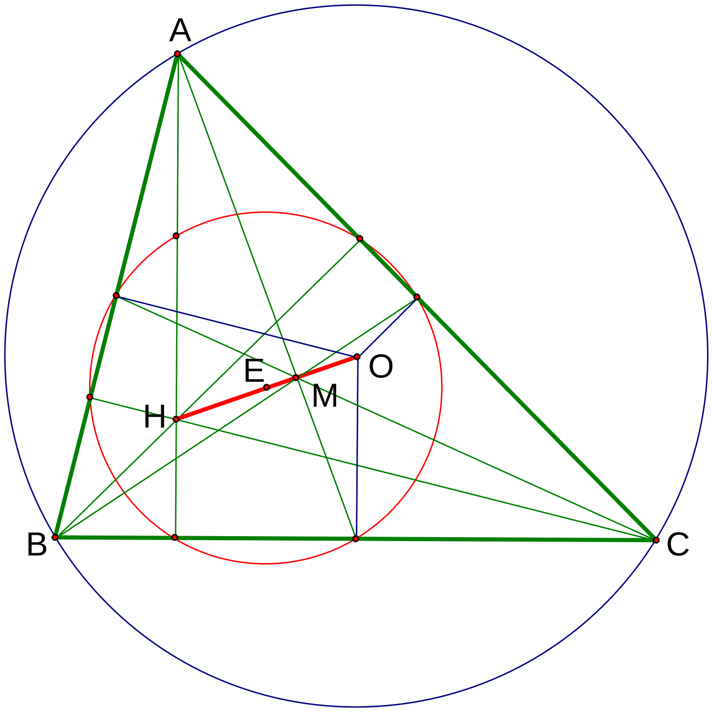

Рис. 12:

Доказательство этой замечательной теоремы мы разобьем на несколько этапов. Сразу предупредим, что доказательство будет более длинным и сложным, нежели доказательство теоремы об окружности Эйлера, однако в награду за терпение мы узнаем много других замечательных утверждений, связанных с геометрией треугольника.

4.1 Точки E, H, O

Сначала докажем, что точка E является серединой отрезка OH. Для этого посмотрим на рисунок 13. Четырехугольник HOM_AA_1 является трапецией, поскольку прямые HA_1 и OM_A перпендикулярны A_1M_A и, стало быть, параллельны. Тогда средняя линия этой трапеции является серединным перпендикуляром к стороне A_1M_A. Аналогичное можно утверждать про средние линии трапеций HOM_BB_1 и HOM_CC_1. Все эти средние линии пересекаются в середине общей стороны HO. Но с другой стороны, на этих средних линиях должен лежать центр E окружности Эйлера! Ведь центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде. Следовательно, середина отрезка HO и есть точка E.

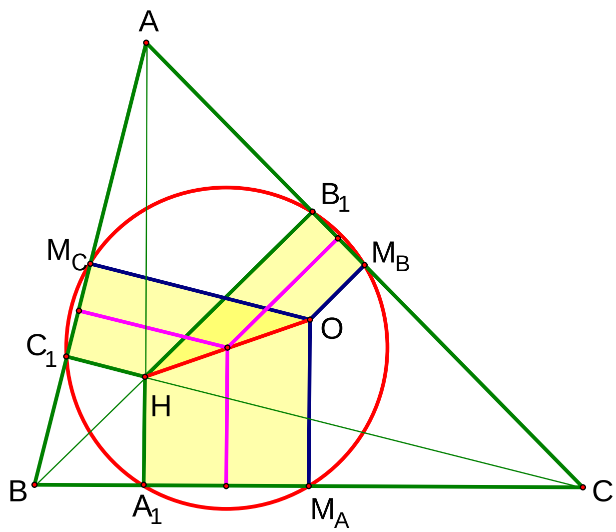

Рис. 13:

4.2 Параллелограммы Эйлера

Теперь нам предстоит «загнать» на отрезок HO точку M пересечения медиан треугольника ABC. Сделать это будет гораздо сложнее. Прежде чем переходить непосредственно к доказательству, обратимся сначала к важной конструкции, тесно связанной с предыдущим разделом.

Утверждение 3. *Четырехугольники HH_AOM_A и H_AAOM_A являются параллелограммами (см. рис. 14 и 15).*

Мы будем называть их *первым и вторым параллелограммом Эйлера.*

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник HH_AOM_A (рис. 14). Как было доказано в предыдущем разделе, точка E является серединой диагонали HO. Но та же самая точка E является серединой второй диагонали H_AM_A, поскольку H_AM_A — диаметр окружности Эйлера, а E — ее центр. Тем самым мы получаем, что в четырехугольнике HH_AOM_A диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Следовательно, этот четырехугольник является параллелограммом. □

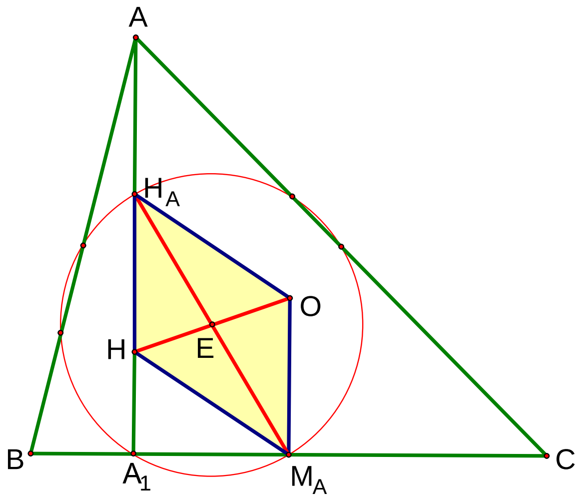

Рис. 14:

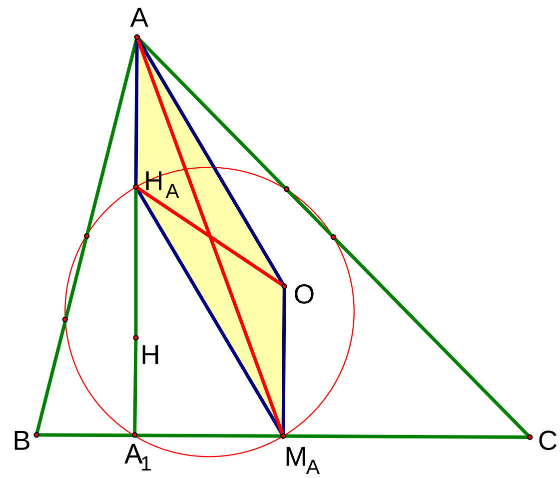

Рис. 15:

Упражнение. Докажите, что четырехугольник H_AAOM_A также является параллелограммом.

С помощью параллелограммов Эйлера можно доказать многие замечательные факты, связанные с окружностью Эйлера. Мы приведем лишь два таких факта.

Утверждение 4. *Радиус окружности Эйлера вдвое меньше радиуса описанной окружности треугольника ABC.*

Утверждение 5. *Отрезок AH вдвое больше отрезка OM_A.*

Упражнение. Докажите эти утверждения.

4.3 Точка A' и еще один параллелограмм

Теперь перейдем непосредственно к доказательству второй части теоремы о прямой Эйлера. А именно, сейчас наша цель — доказать, что точки H, M и O лежат на одной прямой. Для этого нам потребуется следующее дополнительное построение.

Рассмотрим точку A', диаметрально противоположную точке A относительно описанной окружности треугольника ABC. Оказывается, именно рассмотрение этой точки играет ключевую роль в доказательстве теоремы о прямой Эйлера. Однако сначала нам потребуется исследовать некоторые ее свойства.

Утверждение 6. *Четырехугольник $BHCA'$ является параллелограммом (см. рис. 16).*

Доказательство. В самом деле, прямая BH перпендикулярна стороне AC, и прямая CA' перпендикулярна стороне AC (почему?). Следовательно, стороны BH и CA' параллельны. Аналогично, параллельны стороны CH и BA'. Следовательно, четырехугольник $BHCA'$ является параллелограммом по определению. □

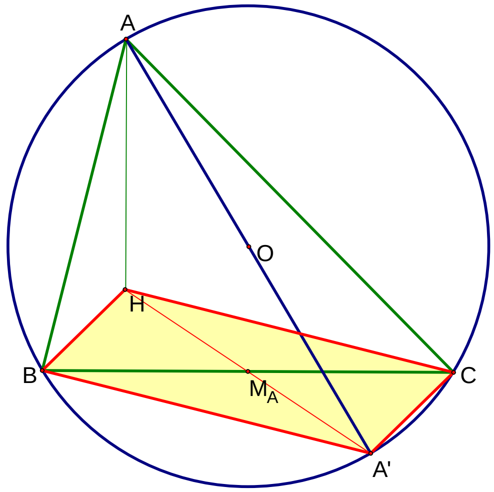

Рис. 16:

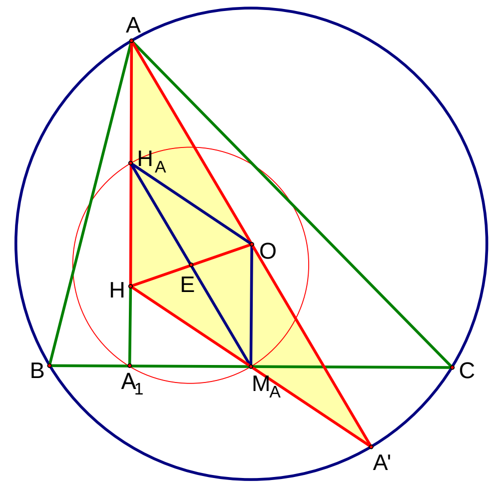

Рис. 17:

Мы также выведем из этого замечательного утверждения два факта. Первый будет использован в доказательстве теоремы о прямой Эйлера, а второй представляет самостоятельный интерес.

Утверждение 7. *Точка M_A — середина отрезка HA'*

Доказательство. Действительно, диагонали BC и HA' параллелограмма $BHCA'$ пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Но M_A — середина диагонали BC, значит, она же — середина диагонали HA'. □

Обратим внимание на следующий любопытный момент: в треугольнике $AA'H$ отрезки H_AO, OM_A и M_AH_A являются средними линиями (см. рис. 17). Отсюда мы сразу получаем другое доказательство утверждений 4 и 5, не использующее параллелограммы Эйлера. Более того, с помощью этой конструкции можно также доказать, что точка E является серединой отрезка OH! Попробуйте сделать это самостоятельно.

Перейдем теперь ко второму факту.

Утверждение 8. *Точка, симметричная H относительно стороны BC, лежит на описанной окружности треугольника ABC.*

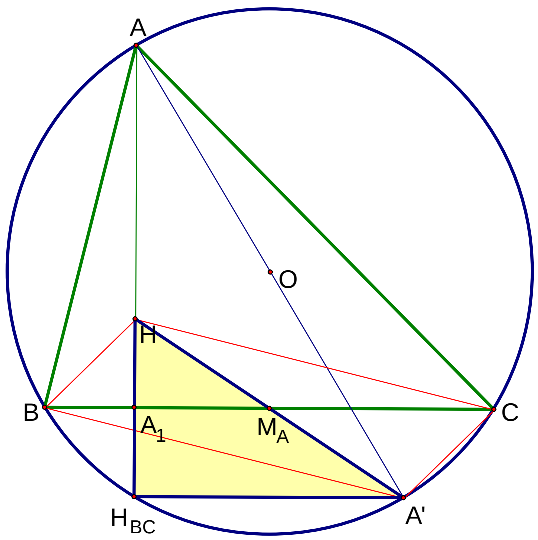

Рис. 18:

Доказательство. Обозначим через H_{BC} точку, симметричную H относительно стороны BC (см. рис. 18). Рассмотрим треугольник $HH_{BC}A'$. В этом треугольнике отрезок A_1M_A является средней линией. Следовательно, он параллелен основанию $H_{BC}A'$. Но $A_1M_A \perp HH_{BC}$, поэтому $\angle AH_{BC}A' = 90°$. Остается воспользоваться опорной задачей: из точки H_{BC} диаметр AA' виден под прямым углом, значит, эта точка лежит на описанной окружности. □

В качестве иллюстрации применения этого факта попробуйте самостоятельно решить две задачи.

Упражнение. Рассмотрим точки пересечения прямых, содержащих высоты BH и CH треугольника ABC, с его описанной окружностью. Докажите, что отрезки, соединяющие эти точки с вершиной A, равны.

Упражнение. Докажите, что радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABH, BCH и ACH, равны.

4.4 Точки H, M, O

Нам осталось сделать заключительный шаг в доказательстве теоремы о прямой Эйлера. Для этого обратимся еще раз к треугольнику AHA' (рис. 19). Заметим, что и у этого треугольника, и у исходного треугольника ABC отрезок AM_A является медианой. Значит, у этих двух треугольников совпадают и точки пересечения медиан, поскольку обе они должны разделить отрезок AM_A в отношении $2:1$, считая от точки A.

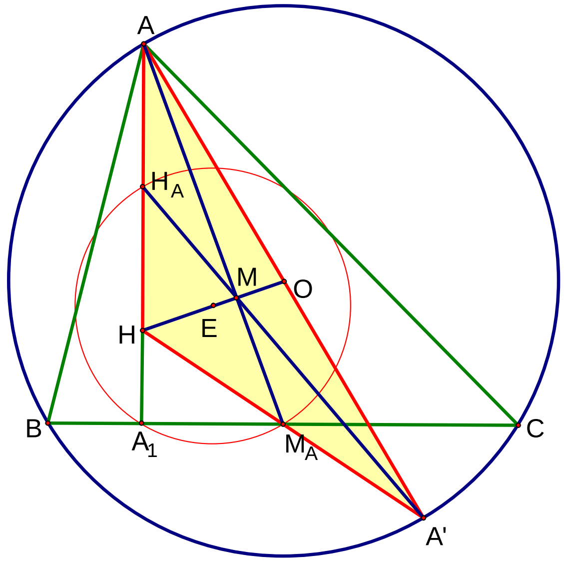

Рис. 19:

Но HO — медиана в треугольнике AHA', поэтому точка M пересечения медиан лежит на ней и делит в отношении $2:1$, считая от точки H! Наше доказательство, наконец, закончено.

Тем самым мы не только доказали теорему о прямой Эйлера, но и вскрыли, так сказать, причину явления. Из доказательства видно, *почему* точки H, M и O лежат на одной прямой и делят ее в нужном отношении. Это связано с тем, что отрезок HO является медианой в треугольнике AHA', а точка M — точкой пересечения медиан этого треугольника. Вот откуда берется загадочное отношение $2:1$!.

Справедливости ради, отметим, что доказательство теоремы о прямой Эйлера, проведенное с помощью гомотетии, также позволяет вскрыть причину этого отношения, однако совершенно с другой стороны.

Обратите внимание, как именно мы двигались к доказательству. На нашем пути практически не встречались признаки равенства треугольников, вычисления с суммой углов и другие набившие оскомину факты, применяющиеся в стандартных задачах для 7–8 класса. Вместо этого мы использовали наблюдения, аналогии, ссылки на уже доказанные факты и т.д. Именно так и доказываются утверждения во «взрослой» геометрии.

5 В дополнение: формула Карно

В заключение мы расскажем об еще одном сюжете: формуле Карно. Эта замечательная формула связывает радиусы пяти окружностей треугольника: вписанной, описанной и трех вневписанных. Каким образом эта формула появляется в нашем рассказе? Дело в том, что она практически сразу следует из результатов раздела 3.2.

Теорема 5. *Пусть R — радиус описанной окружности $\triangle ABC$, r — радиус вписанной окружности и r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей напротив вершин A, B и C соответственно. Тогда*

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

Доказательство. Для доказательства этой формулы посчитаем длину отрезка W_AW^A двумя способами. С одной стороны, как мы знаем, этот отрезок является диаметром описанной окружности, поэтому его длина равна $2R$. С другой стороны, он состоит из двух отрезков W^AM_A и W_AM_A, длины которых мы посчитаем с помощью радиусов вписанной и вневписанных окружностей.

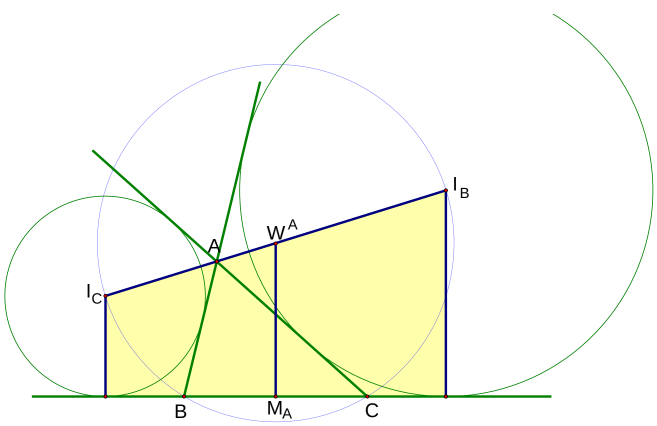

Рис. 20:

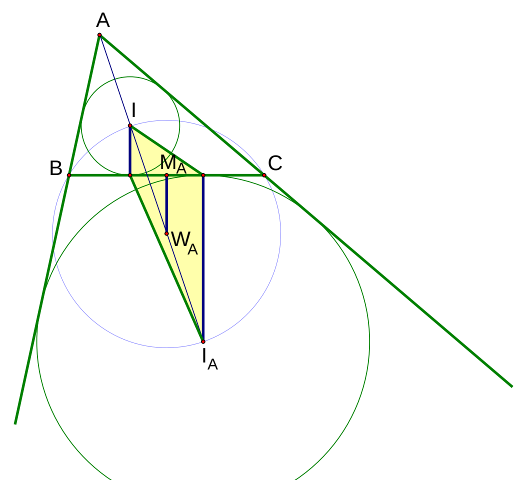

Рис. 21:

Начнем с отрезка W^AM_A. Рассмотрим закрашенный четырехугольник на рис. 20. Этот четырехугольник является трапецией, длины оснований в которых равны r_b и r_c, а отрезок W^AM_A является средней линией этой трапеции, а потому $W^AM_A = \frac{r_b+r_c}{2}$.

Аналогично, рассмотрим закрашенный четырехугольник на рис. 21. Он также является трапецией, длины ее оснований равны r_a и r, а отрезок W_AM_A соединяет середины диагоналей этой трапеции (можно назвать этот отрезок *второй средней линией*). Как известно, длина такого отрезка равна полуразности оснований, откуда находим $W_AM_A = \frac{r_a-r}{2}$.

Наконец, складывая две найденные длины, получаем

$$\frac{r_b + r_c}{2} + \frac{r_a - r}{2} = 2R \Leftrightarrow r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

что и требовалось доказать. $\square$