Описанные циклические линии треугольника в геометрии Лобачевского

П. В. Бибиков

Хорошо известно, что на плоскости Лобачевского вокруг треугольника можно описать либо *окружность*, либо *эквидистанту*, либо *орицикл* (эти кривые называются *циклическими линиями*). В этой статье мы докажем критерий, позволяющий определить, какую именно циклическую линию можно описать вокруг данного треугольника.

1. Краткие напоминания

Все рассмотрения мы будем проводить в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости (см. [1]). Напомним, что *плоскостью Лобачевского* называется фиксированная полуплоскость (которую обычно называют *верхней*) относительно некоторой прямой. Эта прямая вместе с бесконечно удаленной точкой называется *абсолютом*. Точки абсолюта называются *бесконечно удаленными*. *Прямыми* в модели Пуанкаре являются полуокружности с центром на абсолюте и вертикальные лучи, перпендикулярные абсолюту (рис. 1). *Угол* между двумя неевклидовыми прямыми по определению полагается равным евклидовому углу между соответствующими кривыми. *Расстояние* между точками A и B может быть вычислено по формуле

$$\rho(A,B) = \ln\frac{r'+r}{r'-r},$$

где $r = AB$, $r' = A'B$ и A' — точка, симметричная точке A относительно абсолюта.

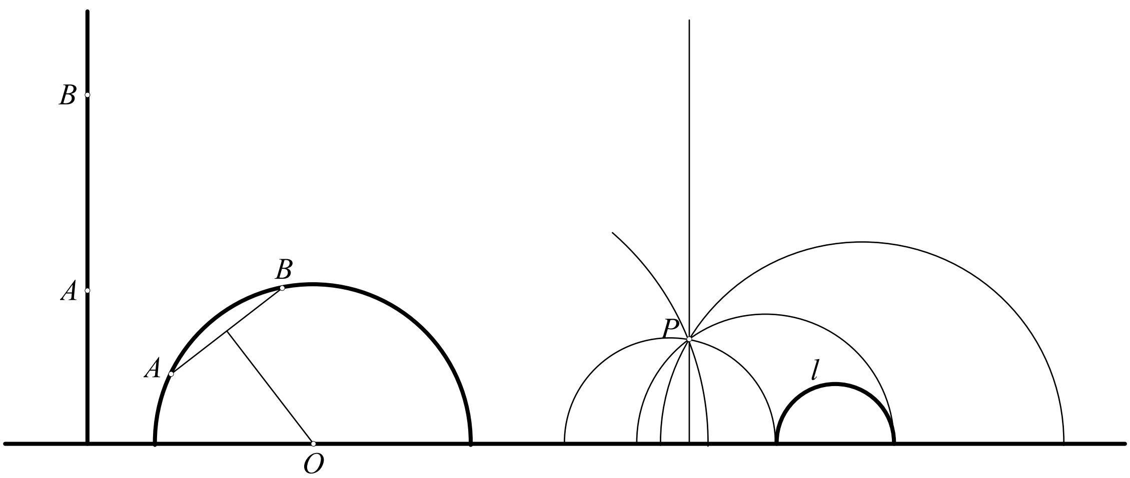

Рис. 1.

В геометрии Лобачевского также можно определить простейшие кривые. Однако, в отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского элементарные кривые более разнообразны и не ограничиваются одной лишь окружностью.

Упражнение 1. Докажите, что всякая евклидова окружность, целиком лежащая в верхней полуплоскости, является также неевклидовой окружностью, и наоборот, каждая неевклидова окружность является одновременно и евклидовой окружностью.

Итак, если евклидова окружность целиком лежит в верхней полуплоскости, то она является неевклидовой окружностью. Возникает естественный вопрос: *а чем является евклидова окружность, пересекающая абсолют?* Для того, чтобы ответить на этот вопрос, напомним еще одно определение.

Определение. 1. *Эквидистантой* называется множество точек, расположенных на заданном расстоянии h от данной прямой p и лежащих в заданной полуплоскости относительно этой прямой. Прямая p называется *базой эквидистанты*, величина h — *высотой*, а фиксированная полуплоскость — *полуплоскостью эквидистанты.*

2. *Орициклом* называется кривая, пересекающая все прямые, имеющие общую бесконечно удаленную точку, под прямым углом.

Упражнение 2. Докажите, что евклидова окружность, касающаяся абсолюта, является орициклом, а окружность, пересекающая абсолют в двух точках, — эквидистантой (рис. 2).

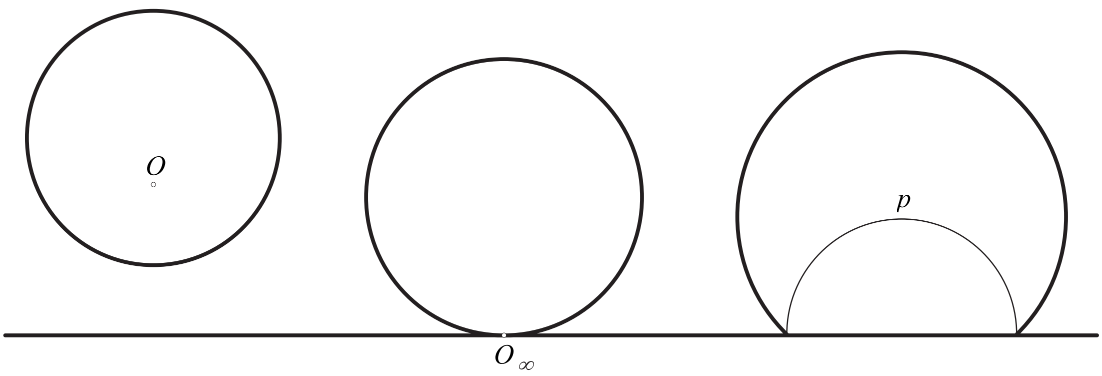

Рис. 2.

Отметим, что наклонные лучи с началом на абсолюте также являются эквидистантами, а прямые, параллельные абсолюту, — орициклами.

Упражнение 3. Докажите это.

Теперь рассмотрим вопрос о существовании описанной окружности треугольника в неевклидовой геометрии. Как известно, в геометрии Евклида вокруг любого треугольника можно описать единственную окружность, центр которой лежит на пересечении срединных перпендикуляров к его сторонам.

Однако в геометрии Лобачевского существуют треугольники, вокруг которых нельзя описать окружность! В самом деле, возьмем евклидову окружность, пересекающую абсолют (т.е. эквидистанту), и рассмотрим неевклидов треугольник с вершинами на этой окружности. Легко видеть, что вокруг такого треугольника нельзя описать *неевклидову* окружность.

Упражнение 4. Подумайте, почему в геометрии Лобачевского не проходит евклидово доказательство о существовании описанной окружности треугольника. Как нужно изменить теорему об описанной окружности, чтобы она стала верной в геометрии Лобачевского?

Итак, мы поняли, что вокруг некоторых треугольников нельзя описать окружность. Возникает вопрос: *а что же тогда можно описать вокруг таких треугольников?* Ответ на этот вопрос очевиден: достаточно вспомнить, как выглядят эквидистанта и орицикл в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского! Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Вокруг любого треугольника можно описать либо единственную окружность, либо единственный орицикл, либо единственную эквидистанту (рис. 3).*

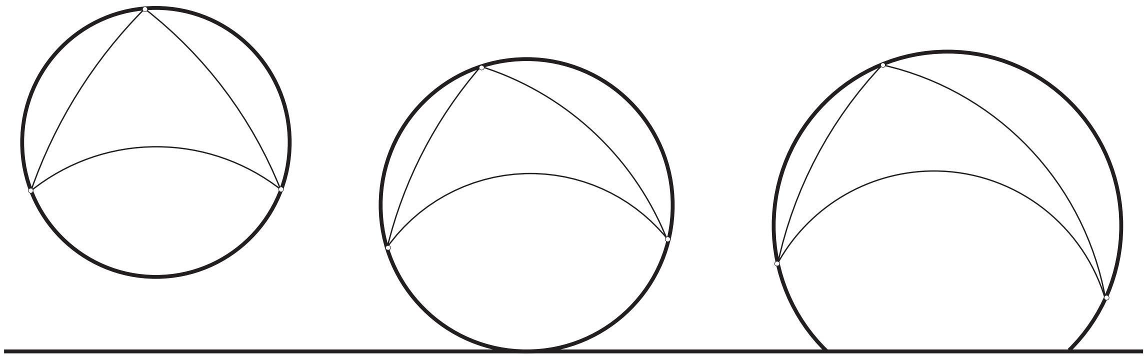

Рис. 3.

Итак, мы знаем, что вокруг любого треугольника можно описать циклическую линию. Но как, зная элементы треугольника, понять, *какую именно* циклическую линию можно описать? В следующем разделе мы докажем критерий, позволяющий это определить.

2. Критерий

Мы начнем наши рассмотрения со случая орицикла. Оказывается, что в этом случае критерий выглядит очень просто.

Лемма 1. *Вокруг треугольника можно описать орицикл тогда и только тогда, когда стороны a, b и c треугольника*[1] *удовлетворяют соотношению*

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}=\operatorname{sh}\frac{c}{2}. \tag{1}$$

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть вокруг треугольника ABC со сторонами a, b и c описан орицикл ξ (рис. 4a). Тогда согласно формуле длины дуги орицикла (см. [2]) имеем:

$$\begin{aligned}\smile BC &= 2\operatorname{sh}\frac{a}{2},\\ \smile AC &= 2\operatorname{sh}\frac{b}{2},\\ \smile AB &= 2\operatorname{sh}\frac{c}{2}.\end{aligned}$$

Поскольку сторона AB имеет наибольшую длину, точка C лежит на дуге $\smile AB$ орицикла ξ. Это означает, что $\smile BC+\smile AC=\smile AB$, что в точности эквивалентно равенству (1).

[1]В этом разделе мы считаем, что c — наибольшая сторона в треугольнике.

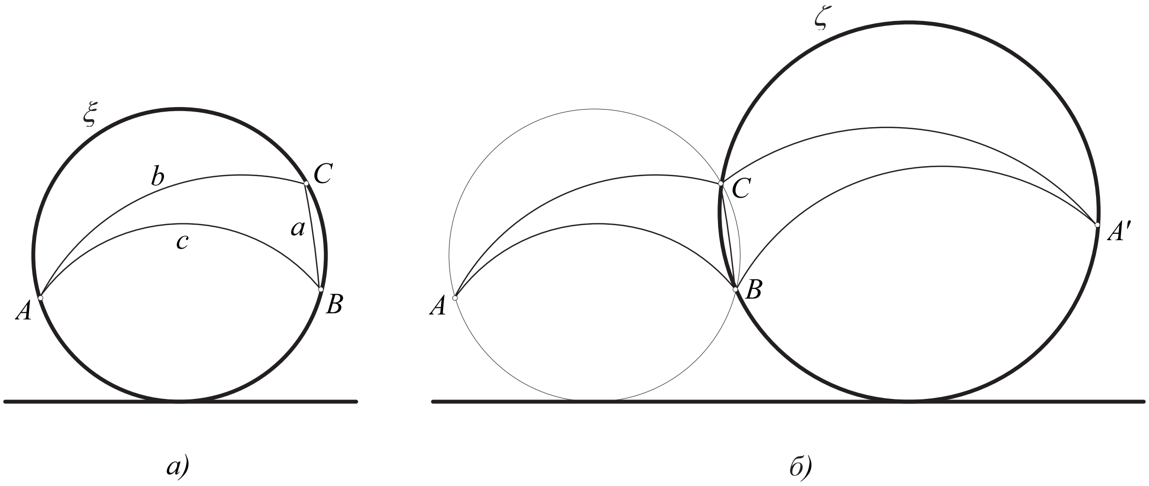

Рис. 4.

Теперь докажем достаточность. Пусть в треугольнике ABC стороны a, b и c удовлетворяют соотношению (1). Рассмотрим орицикл ζ, проходящий через точки B и C (рис. 4б). Длина дуги $\smile BC$, очевидно, равна $2\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{2}$. Отметим на орицикле ζ точку A', такую, что $A'C = b$ и точка C лежит на дуге $\smile BA'$. Тогда $\smile A'C = 2\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{2}$, а значит, длина дуги $\smile A'B$ равна $2\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{2} + 2\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{2} = 2\,\mathrm{sh}\,\frac{c}{2}$. Отсюда следует, что $A'B = c$. Т.о., мы доказали, что $\triangle ABC = \triangle A'BC$, а значит, описанной циклической линией треугольника ABC является орицикл. $\square$

Поясним, почему мы начали именно с орицикла, а не с окружности или эквидистанты. Грубо говоря, дело в том, что орициклов меньше, чем других циклических линий. А именно, легко доказать, что две окружности (соответственно эквидистанты) равны тогда и только тогда, когда равны их радиусы (соответственно высоты). С другой стороны, *любые* два орицикла равны (почему?). Поэтому логично ожидать, что критерий вписанности треугольника в орицикл будет задаваться равенством.

Теперь подумаем, каким будет критерий в случае окружности или эквидистанты. Для этого применим следующее соображение. Рассмотрим евклидову окружность, целиком лежащую в верхней полуплоскости, и впишем в нее треугольник. Будем увеличивать радиус этой евклидовой окружности, не изменяя положения ее центра. Тогда картинка будет меняться так: при небольшом увеличении радиуса вокруг треугольника будет описана неевклидова окружность, потом наступит момент касания евклидовой окружности с абсолютом, что соответствует случаю орицикла, а потом евклидова окружность будет пересекать абсолют в двух точках, и это случай эквидистанты (рис. 3). При таком изменении величина $\mathrm{sh}\,\frac{a}{2} + \mathrm{sh}\,\frac{b}{2} - \mathrm{sh}\,\frac{c}{2}$ будет меняться непрерывно (и даже гладко) и в некоторый момент (в случае орицикла) окажется равной 0. Поэтому в случае окружности или эквидистанты величина $\mathrm{sh}\,\frac{a}{2} + \mathrm{sh}\,\frac{b}{2} - \mathrm{sh}\,\frac{c}{2}$ будет либо больше нуля, либо меньше нуля. Логично предположить, что эти неравенства и будут критерием вписанности треугольника в окружность и эквидистанту! И это на самом деле так.

Лемма 2. *1) Вокруг треугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}>\operatorname{sh}\frac{c}{2};$$

2) Вокруг треугольника можно описать эквидистанту тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}<\operatorname{sh}\frac{c}{2}.$$

Доказательство. Доказательство достаточности условий леммы не представляет труда, поэтому мы докажем только необходимость. Для этого предварительно сделаем следующее замечание: *указанные неравенства достаточно доказать только для одного треугольника, вписанного в данную циклическую линию*, поскольку тогда оно будет выполняться и для всех остальных треугольников, в нее вписанных. В самом деле, предположим, что для некоторого треугольника, вписанного, например, в окружность, неравенство п.1 выполнено. Тогда, перемещая вершины этого треугольника по окружности, можно получить любой другой треугольник, также вписанный в эту окружность. Но при этом величина, стоящая в левой части неравенства п.1, будет меняться *непрерывно*. Значит, если мы получили бы неравенство, противоположное к нашему, то по теореме Коши о промежуточном значении это бы означало, что в какой-то момент изменения существовал бы треугольник, для которого неравенство п.1 обратилось бы в равенство. Но согласно лемме 1, отсюда следовало бы, что этот треугольник должен был бы быть вписан в орицикл, а не в окружность — противоречие.

Таким образом, для каждой окружности или эквидистанты неравенства достаточно проверить лишь для одного треугольника. Очевидно, что в случае окружности это легче всего сделать для правильного треугольника (т.е. для треугольника, у которого равны все углы и все стороны). В случае эквидистанты можно считать, что она является наклонным лучом (т.е. задается уравнением $y = kx$). Для нее можно выбрать треугольник, абсциссы вершин которого равны 1, 2 и 3.

Упражнение 5. Докажите неравенство п.2, проделав необходимые вычисления.

□

Таким образом, окончательный критерий выглядит следующим образом.

Теорема 2 (Критерий формы описанной циклической линии треугольника)**.** *1) Вокруг треугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}>\operatorname{sh}\frac{c}{2};$$

2) Вокруг треугольника можно описать орицикл тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}=\operatorname{sh}\frac{c}{2};$$

3) Вокруг треугольника можно описать эквидистанту тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}<\operatorname{sh}\frac{c}{2}.$$

3. Вневписанные циклические линии

Помимо описанной окружности, в евклидовой геометрии есть еще несколько замечательных окружностей, связанных с треугольником: вписанная окружность и три вневписанные окружности. Естественный вопрос: *существуют ли эти окружности в геометрии Лобачевского?*

Оказывается, что со вписанной окружностью все в порядке: а именно, в любой неевклидов треугольник можно вписать единственную окружность, центр которой совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника.

Упражнение 6. Докажите это утверждение.

А вот с вневписанными окружностями ситуация похожа на ситуацию с описанной окружностью. Например, существуют треугольники, для которых нет *ни одной* вневписанной окружности (попробуйте нарисовать соответствующий пример). Однако верна следующая теорема.

Теорема 3. *У любого треугольника существуют три вневписанные циклические линии, т.е. три циклические линии, касающиеся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон (рис. 5).*

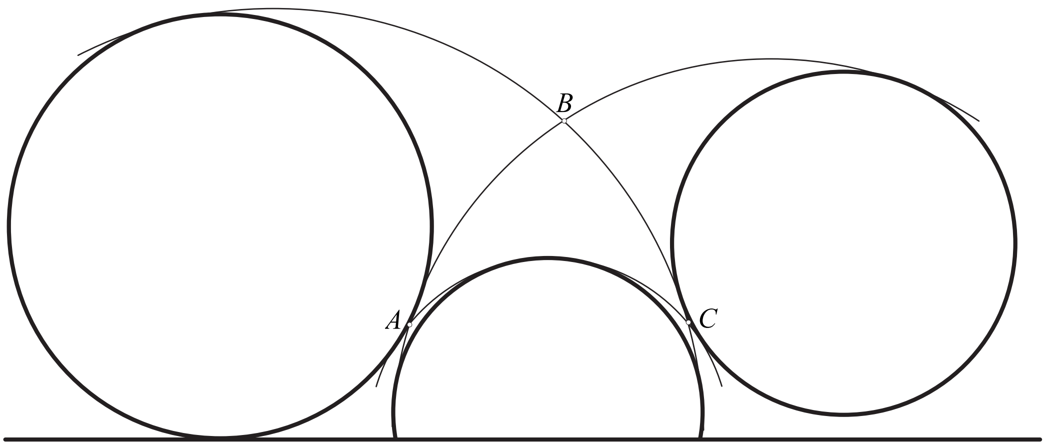

Рис. 5.

Упражнение 7. Докажите эту теорему.

Естественным представляется вопрос о форме вневписанной циклической линии, касающейся фиксированной стороны треугольника. Из теоремы 2 можно очень просто получить критерий, позволяющий определить форму вневписанной циклической линии.

Пусть ABC — произвольный треугольник, и ω — его вневписанная циклическая линия, касающаяся стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно (рис. 6). Заметим, что ω является описанной циклической линией треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому к нему можно применить теорему 2 и получить искомый критерий. Для этого нужно лишь вычислить длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$.

Итак, пусть стороны треугольника $A_1B_1C_1$ равны a_1, b_1 и c_1, стороны треугольника ABC равны a, b и c, а углы равны α, β и γ.

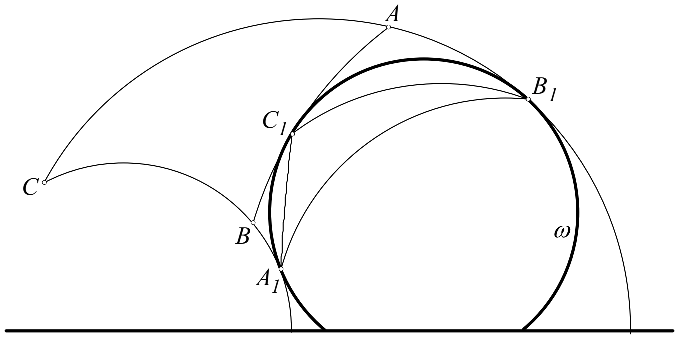

Рис. 6.

Упражнение 8. Докажите следующие равенства:

$$\operatorname{sh}\frac{a_1}{2} = \operatorname{sh}(p-b)\cos\frac{\alpha}{2},$$
$$\operatorname{sh}\frac{b_1}{2} = \operatorname{sh}(p-a)\cos\frac{\beta}{2},$$
$$\operatorname{sh}\frac{c_1}{2} = \operatorname{sh}p\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Теперь мы можем выписать критерий, позволяющий определить форму вневписанной циклической линии.

Теорема 4 (Критерий формы вневписанной циклической линии треугольника)**.** *Пусть ABC — произвольный треугольник, и ω — его вневписанная циклическая линия, касающаяся стороны AB и продолжений сторон CA и CB. Тогда*

1) ω является окружностью тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{sh}(p-a)\cos\frac{\beta}{2} + \operatorname{sh}(p-b)\cos\frac{\alpha}{2} > \operatorname{sh}p\sin\frac{\gamma}{2};$$

2) ω является орициклом тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{sh}(p-a)\cos\frac{\beta}{2} + \operatorname{sh}(p-b)\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sh}p\sin\frac{\gamma}{2};$$

3) ω является эквидистантой тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{sh}(p-a)\cos\frac{\beta}{2} + \operatorname{sh}(p-b)\cos\frac{\alpha}{2} < \operatorname{sh}p\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Список литературы

[1] С. Г. Гиндикин. *Рассказы о физиках и математиках.* М.: МЦНМО, НМУ, 2001.

[2] А. С. Смогоржевский. *О геометрии Лобачевского.* М.: ГИТТЛ, 1957.