Геометрические задачи во Второй школе

П. В. Бибиков

Введение.

— Боюсь, что не сумею вам все это объяснить, — учтиво промолвила Алиса. — Я и сама ничего не понимаю.

Льюис Кэрролл, «Алиса в Стране Чудес».

Данная коллекция задач рассчитана на школьников, освоивших курс 9 класса средней школы по геометрии. Основной целью предлагаемых задач является прежде всего развитие математической культуры у учащихся, а также вкуса к геометрическим задачам. *Я не ставил своей целью натаскать учащихся на решение олимпиадных задач.* Поэтому среди задач практически нет «гробов» или задач с громоздкими чертежами, столь любимых составителями олимпиад. Большинство конфигураций очень естественны и просты, и тем удивительнее тот факт, что зачастую большинство решений далеко не тривиальны.

Эта брошюра состоит из двух частей. В первой части приводятся так называемые *опорные задачи*, этакие «кирпичики», из которых можно «сложить» решения большинства задач по планиметрии.

Во второй части приводятся условия задач. Я старался отобрать задачи с одной стороны интересные и без нагромождений, а с другой стороны, нестандартные, которым не остается времени на уроках.

В заключение я хотел бы выразить благодарность учащимся 9 «Б» и «В» классов, на которых данный сборник был опробован летом 2008 года (как мне кажется, не без успеха) и которые предложили много новых решений, даже несмотря на 30-градусную жару, отсутствие парт и необходимость постоянно готовить концерты, посвященные «Дню тапочек».

1. Опорные задачи.

— Что толку в книжке, — подумала Алиса, —
если в ней нет картинок?

Льюис Кэрролл, «Алиса в Стране Чудес».

Перед тем, как решать задачи, полезно ознакомиться с основными фактами школьной геометрии. Эти факты мы[1] называем *опорными задачами*, поскольку на них можно *опереться* при решении более сложных задач.

Одно из основных отличий геометрии от алгебры заключается в том, что геометрия *менее алгоритмизирована*: если по виду алгебраической задачи, как правило, понятно, как ее нужно решать, то по виду геометрической задачи это можно сделать далеко не всегда. Именно это обстоятельство представляет основную сложность при решении геометрических задач: геометрия является значительно более *творческой* наукой, что дало многим математикам прошлого повод назвать ее одним из видов *искусства*.

Данное пособие призвано помочь школьнику овладеть этим искусством. Для этого мы отобрали из всего многообразия геометрических фактов и теорем *25* утверждений, которые наиболее часто применяются при решении задач. Эти утверждения мы называем *опорными задачами*, поскольку, *опираясь* на них, можно решить практически любую задачу по геометрии.

Основная идея опорных задач заключается в том, что необходимо запомнить ограниченный (весьма небольшой!) набор *конкретных утверждений* и при решении задачи вспомнить опорные задачи, которые *могут иметь отношение* к данной конфигурации. Для этого, разумеется, нужно хорошо помнить все опорные задачи (для чего их прежде всего нужно прорешать) *вместе с картинками и условиями.*

Данное пособие имеет одну отличительную особенность: *условия опорных задач не приводятся.* Это объясняется тем, что школьник, решая геометрическую задачу, видит перед собой чертеж, а не текст, поэтому для применения той или иной опорной задачи необходимо держать в голове *именно картинку!* Кроме того, наличие текста всегда вызывает искушение выучить наизусть именно его, что редко помогает на практике. Как правило, из рисунков можно легко догадаться, о чем идет речь, поскольку *все* предлагаемые утверждения должны быть хорошо известны (по крайней мере учителю); кроме того, названия рисунков отражают тематику той или иной опорной задачи.

Цвета на рисунках не только помогают выделить те или иные объекты, но еще и служат дополнительным пояснением к задаче: черным цветом обозначены объекты, которые даны в условии; синим цветом выделены объекты, про которые ставится вопрос в задаче (например, равенство отрезков или углов); зеленым цветом обозначены дополнительные построения, помогающие решить задачу; наконец, красным цветом выделены подписи и формулы.

После того, как опорные задачи будут проработаны, можно начинать решать задачи из части 2. Надо сказать, что я не стремился подобрать задачи под опорные факты, т.е. так, чтобы они решались быстро и просто с применением приведенных ниже фактов. Тем не менее получилось именно так. Наверное, это говорит о том, что список опорных задач получился неплохим.

Удачи!

[1] Я и К. В. Козеренко

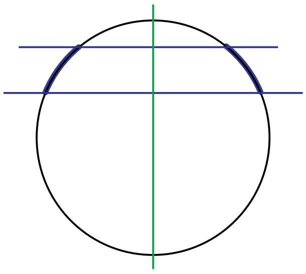

Рис. 1. Осевая симметрия

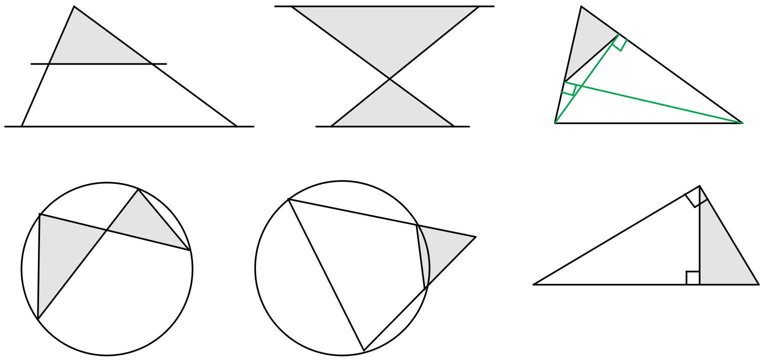

Рис. 2. 6 стандартных подобий

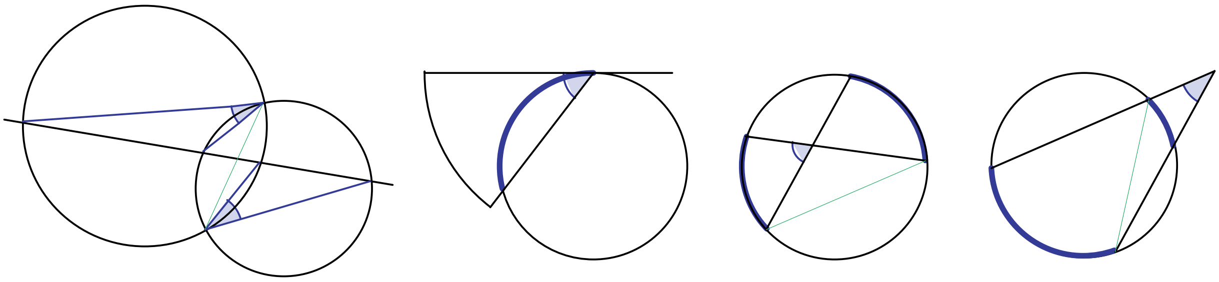

Рис. 3. Вписанные углы

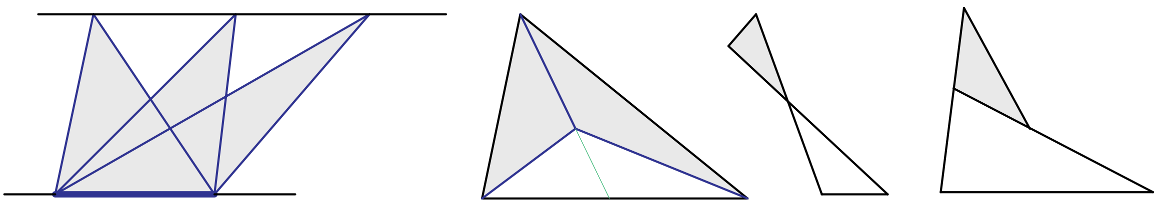

Рис. 4. Метод площадей

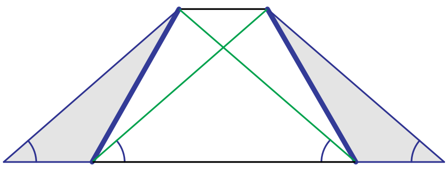

Рис. 5. Признак равнобокости трапеции

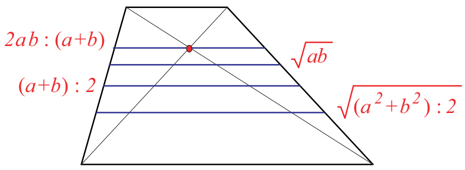

Рис. 6. Замечательные отрезки в трапеции

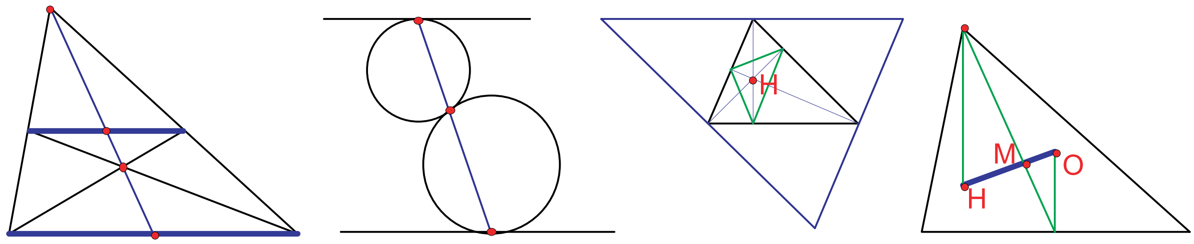

Рис. 7. Гомотетия

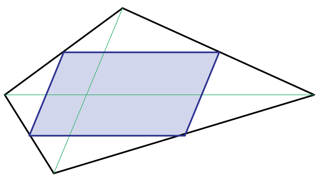

Рис. 8. Вариньон

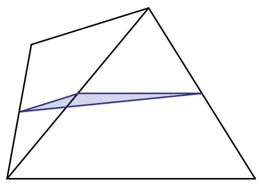

Рис. 9. Метод средних линий

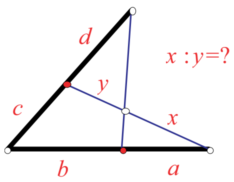

Рис. 10. Пропорциональные отрезки

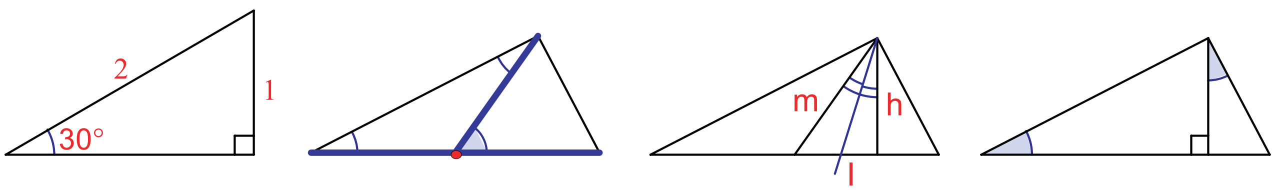

Рис. 11. 4 свойства прямоугольного треугольника

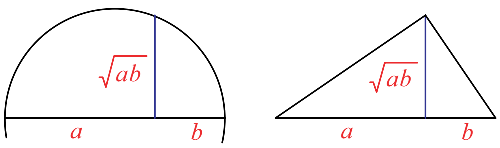

Рис. 12. Среднее геометрическое

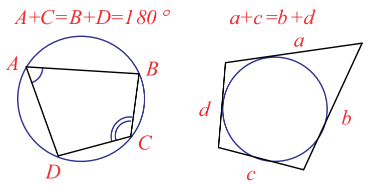

Рис. 13. Вписанные и описанные четырехугольники

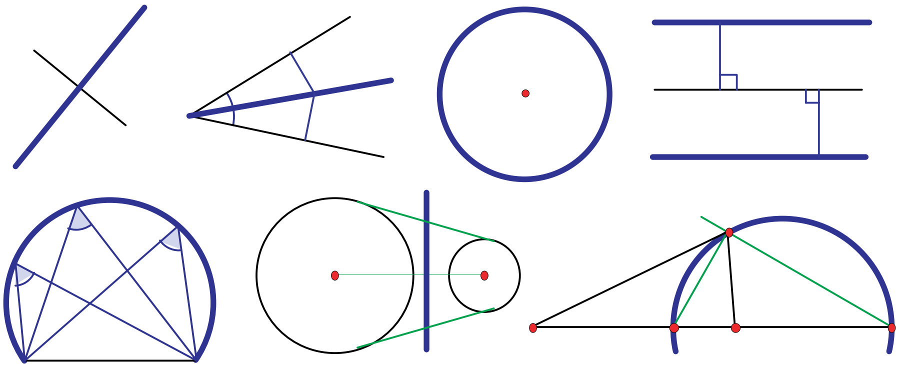

Рис. 14. 7 ГМТ

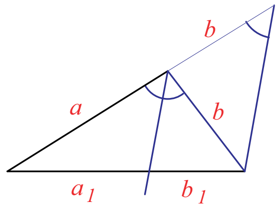

Рис. 15. Свойство биссектрисы

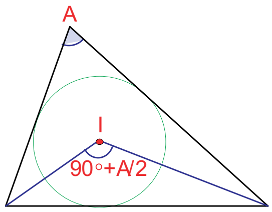

Рис. 16. Угол I

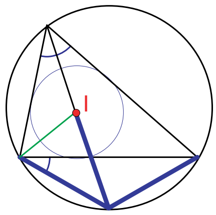

Рис. 17. Теорема о трезубце

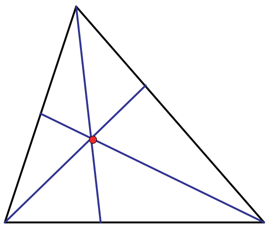

Рис. 18. Чева

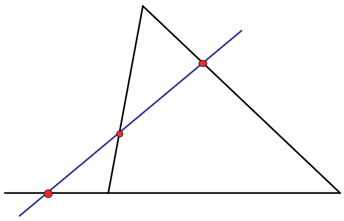

Рис. 19. Менелай

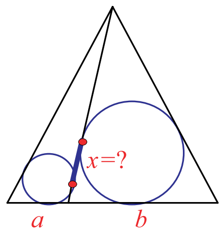

Рис. 20. Отрезки касательных

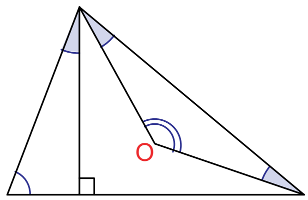

Рис. 21. Центральный и вписанный углы

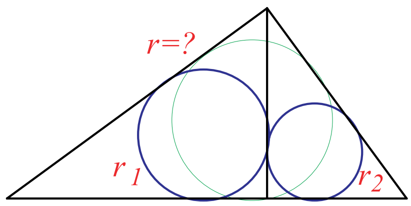

Рис. 22. Обобщенная теорема Пифагора

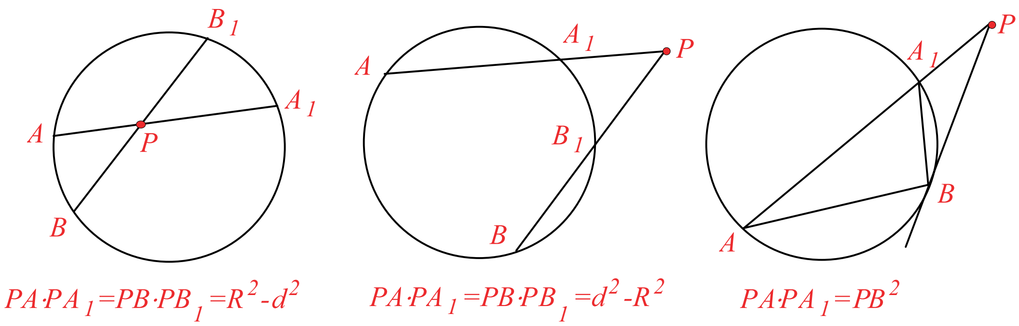

Рис. 23. Пропорциональные отрезки в круге

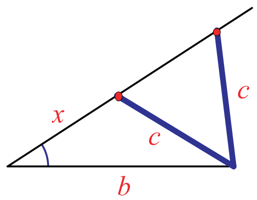

Рис. 24. $c^2 = x^2 + b^2 - 2bx\cos\gamma$

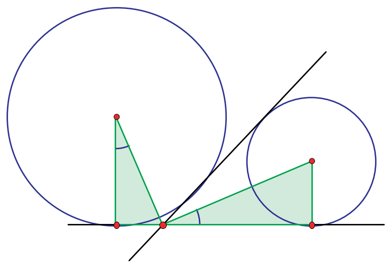

Рис. 25. Биссектрисы смежных углов

2. Условия задач.

И если ты это найдешь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что в этой мудрости ты все до конца превзошел.

Архимед.

Все задачи, представленные в данном сборнике, делятся на так называемые *сюжеты.* Сюжет — это набор задач, связанных друг с другом общей конфигурацией или методами решения. Разумеется, иногда подобное разделение условно, поскольку многие задачи допускают несколько решений. Однако в большинстве случаев наиболее простым и изящным является решение, использующее тематику данного сюжета.

Я не стал приводить решения задач, поскольку иначе этот сборник разросся бы до размеров задачника Прасолова, причем не столько потому, что здесь много задач (как раз наоборот), сколько потому, что некоторые задачи допускают чуть ли не 10 (!!!) различных решений. Например, несколько задач очень просто и быстро решаются с помощью *инверсии* (спасибо Жене Алексеевой, Мите Леонкину и Диме Лоцману за эти решения).

Основное отличие сюжета от *подборки* заключается в том, что задачи из одного сюжета в отличие от подборки используют одну конфигурацию и разные идеи решения. Кроме того, название сюжета не включает основной метод решения задач из него.

В начале каждого сюжета дается описание основной конфигурации (если она есть) и вводятся необходимые обозначения. Они используются на протяжении всего сюжета без каких-либо пояснений.

Следуя Маяковскому

> ... Паровоз построить мало —
> накрутил колес и утек.
> *Если песнь не громит вокзала,*
> *то к чему переменный ток?..*

я старался сделать так, чтобы конечной целью любого сюжета было решение некоторой сложной и яркой задачи, которую невозможно решить без предварительной подготовки. Первые задачи сюжета являются «вводными», они помогают решателю войти в курс дела и освоиться с основными идеями и методами данного сюжета. Последующие же идут по возрастанию сложности, и, как правило, используют результаты ранее встречавшихся задач, поэтому перемешивать задачи внутри сюжета *не рекомендуется.* Апофеозом является последняя задача, которая и объясняет, «к чему переменный ток». Более того, предыдущие задачи не только помогают ее решить, но и вскрывают причину данного явления и объясняют, *как можно было додуматься до такой задачи* (вопрос, который очень часто задается и на который очень редко дается четкий ответ).

Сюжеты практически независимы друг от друга, поэтому можно решать их в любом порядке. Однако в данном сборнике они расположены, как мне кажется, по возрастанию сложности и изощренности решений.

Среди предлагаемых ниже задач *практически нет авторских.* Большинство из них я заимствовал из разных сборников и задачников. Я не стал указывать, откуда я взял ту или иную задачу, поскольку, во-первых, это утомительно, во-вторых, некоторые задачи встречаются в разных сборниках, а в-третьих, некоторые задачи являются «классикой» и восходят еще к Архимеду.

Сюжет 1. «Т» – конфигурация в прямоугольном треугольнике

В этом сюжете мы будем рассматривать прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C и проведенной высотой CH. Отрезки CH и AB напоминают перевернутую букву «Т», откуда и происходит название сюжета. Эта конфигурация очень часто встречается в различных задачах, однако, как правило, она используется лишь в качестве вспомогательного инструмента. Сейчас мы увидим, что и сама «Т» – конфигурация обладает богатыми свойствами. Ниже предложены задачи, которые демонстрируют ее связь с биссектрисами.

1.1. Пусть CL, HL_1 и HL_2 — биссектрисы прямых углов $\widehat{ACH}$, $\widehat{BHC}$ и $\widehat{AHC}$ соответственно. Докажите, что точки C, H, L, L_1 и L_2 лежат на одной окружности.

1.2. Пусть CL — биссектриса угла $\widehat{ACH}$. Докажите, что треугольник BCL — равнобедренный.

1.3. Пусть CL_1 и CL_2 — биссектрисы углов $\widehat{ACH}$ и $\widehat{BCH}$ соответственно. Докажите, что диаметр вписанной окружности треугольника ABC равен отрезку L_1L_2.

1.4. Пусть I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ACH и BCH соответственно. Докажите, что $I_1I_2 = CI$.

1.5. Докажите, что I — точка пересечения высот в треугольнике CI_1I_2.

1.6. Прямая I_1I_2 пересекает катеты AC и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $CM = CN = CH$.

Сюжет 2. Педальный треугольник

Тема этого сюжета — педальные треугольники. *Педальный треугольник треугольника ABC относительно точки P* — это треугольник с вершинами в основаниях перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника ABC. Замечу, что точка P вовсе не обязана лежать внутри треугольника! Подборка совсем небольшая, и является типичным примером «ликбеза», т.е. формирует у учащихся общее представление об объекте и о различных задачах, с ним связанных. Поэтому сюда не включены такие задачи, как формула Эйлера, и т.д.

2.1. Докажите, что точка H_1, центрально симметричная точке P относительно середины отрезка P_2P_3, является точкой пересечения высот в треугольнике AP_2P_3.

2.2. Пусть H_1, H_2 и H_3 — ортоцентры в треугольниках AP_2P_3, BP_3P_1 и CP_1P_2 соответственно. Докажите, что $\triangle H_1H_2H_3 = \triangle P_1P_2P_3$.

2.3. Пусть N_1, N_2 и N_3 — точки пересечения прямых AP, BP и CP с описанной окружностью треугольника ABC соответственно. Докажите, что треугольник $N_1N_2N_3$ подобен треугольнику $P_1P_2P_3$.

2.4. Рассмотрим педальный треугольник $A_1B_1C_1$ треугольника ABC, потом педальный треугольник $A_2B_2C_2$ треугольника $A_1B_1C_1$, и, наконец, педальный треугольник $A_3B_3C_3$ треугольника $A_2B_2C_2$ относительно одной и той же точки P. Докажите, что треугольники $A_3B_3C_3$ и ABC подобны.

Сюжет 3. Вписанные углы и вписанные четырехугольники

Данный сюжет представляет собой коллекцию задач на вписанные углы. Основной идеей этих задач является доказательство того, что какие-то точки лежат на одной окружности. В отличие от других сюжетов, эти задачи никак не связаны друг с другом и скорее служат для заполнения времени, нежели для демонстрации некоторой яркой идеи.

3.1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка M — середина дуги $\smile AB$. Прямые CM и DM пересекают сторону AB в точках C' и D' соответственно. Докажите, что четырехугольник $CDC'D'$ вписанный.

3.2. Докажите, что в равнобокой трапеции вершины боковой стороны, точка пересечения диагоналей и центр описанной окружности лежат на одной окружности.

3.3. В четырехугольнике диагонали пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Из точки O опущены перпендикуляры OP_i ($i = 1,\ldots, 4$) на стороны четырехугольника. Докажите, что четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ вписанных.

3.4. В треугольнике ABC проведены биссектриса BL и высота BH. Из вершин A и C на нее опущены высоты AH_1 и CH_2. Точка M — середина стороны AC. Докажите, что точки M, H, H_1 и H_2 лежат на одной окружности. *Докажите, что центр этой окружности лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.

3.5. Из вершины параллелограмма на стороны и диагональ опущены перпендикуляры. Докажите, что основания этих перпендикуляров и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат на одной окружности.

3.6. В окружность вписан равнобедренный треугольник ACD ($AC = CD$). В точке A к окружности проведена касательная. Произвольная точка K на этой касательной соединена с точкой C, и точка B — пересечение окружности с отрезком KC. Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Докажите, что KP параллельно AD.

3.7. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. К этим окружностям в точке B проведены касательные, пересекающие радиусы O_1A и O_2A в точках P_1 и P_2 соответственно. Докажите, что P_1P_2 параллельно O_1O_2.

3.8. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружность. Из произвольной точки P дуги $\smile AB$ опустим перпендикуляры PI, PQ и PR на прямые AB, AC и BD соответственно. Докажите, что точка I — центр вписанной окружности треугольника PQR.

3.9. Две окружности пересекаются в точках A и B. К окружностям в точке A проведены касательные, вторично пересекающие окружности в точках P и Q соответственно. Отрезок PQ пересекает первую окружность в точке R. Докажите, что прямая RB пересекает отрезок AQ в его середине.

3.10. Рассмотрим две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Прямая a пересекает первую окружность в точках A_1 и B_1, а вторую — в точках A_2 и B_2. Докажите, что либо $\angle A_1PB_2 = \angle B_1QA_2$, либо $\angle A_1PB_2 + \angle B_1QA_2 = \pi$ (возможны разные случаи!).

3.11. Рассмотрим две окружности, касающиеся внутренним образом в точке P. Пусть хорда BC первой окружности касается второй окружности в точке Q, а точка W — середина дуги $\smile BC$. Докажите, что точки P, Q, W лежат на одной прямой. *Сравните эту задачу с предыдущей.

3.12. Две окружности пересекаются в точках P и Q, причем центр второй окружности лежит на первой окружности. На первой окружности взяли произвольную точку C и соединили с P и Q. Пусть R — точка пересечения CP со второй окружностью. Докажите, что $CQ = CR$.

3.13. Рассмотрим две окружности с центрами в точках O_1 и O_2, пересекающиеся в точках A и B. Прямая O_2A пересекает первую окружность в точке C. Докажите, что точки O_1, O_2, B и C лежат на одной окружности.

3.14. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки, лежащей на описанной окружности треугольника ABC на его стороны, лежат на одной прямой[2]. *Докажите обратное утверждение.

3.15. Две окружности пересекаются в точках A и B. На первой окружности взята произвольная точка M. Прямые AM и BM пересекают вторую окружность в точках P и Q. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от точки M.

3.16. Пусть A_1, B_1 и C_1 — произвольные точки, лежащие на прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1 пересекаются в одной точке.

3.17. Рассмотрим четыре прямые общего положения. Докажите, что описанные окружности полученных треугольников пересекаются в одной точке[3].

3.18. Рассмотрим шестиугольник, вписанный в окружность. Докажите, что если две пары его противоположных сторон параллельны (попарно), то и две оставшиеся противоположные стороны параллельны[4].

[2] Эта прямая называется *прямой Симсона*.

[3] Эта точка называется *точкой Микеля*.

[4] Это частный случай *теоремы Паскаля*.

Сюжет 4. Прямая Эйлера и окружность девяти точек

Этот сюжет посвящен классическим результатам, связанным с именем Эйлера. Однако подход к доказательству основного утверждения об окружности девяти точек отличается от общепринятого. Здесь мы стартуем с окружности, описанной вокруг *ортотреугольника*, а не вокруг срединного треугольника. В результате возникают задачи, которые оставались в тени при классическом подходе. Также предлагается несколько подходов к доказательству теоремы о прямой Эйлера.

4.1. Докажите, что $AH = 2OM_A$, где M_A — середина стороны BC.

4.2. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

4.3. Докажите, что точки O, M и H лежат на одной прямой[5], и точка M делит отрезок OH в отношении $1:2$.

4.4. Обозначим через O_A середину отрезка AH. Аналогично введем точки O_B и O_C. Пусть H_A и H_B — основания высот, проведенных из вершин A и B соответственно. Докажите, что отрезки H_AH_B и OC перпендикулярны.

4.5. Рассмотрим окружность, описанную вокруг треугольника H_ABH_C. Докажите, что ее центр — это точка O_B.

4.6. Рассмотрим окружность, описанную вокруг треугольника $H_AH_BH_C$. Докажите, что точки O_A, O_B и O_C также лежат на этой окружности.

4.7. Докажите, что окружность из предыдущей задачи пересекает стороны треугольника ABC в их серединах[6].

4.8. Докажите, что центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера. Более того, он делит отрезок OH пополам.

[5] Она называется *прямой Эйлера*.

[6] Полученная окружность называется *окружностью девяти точек*.

Сюжет 5. Параллелограммы Эйлера

Как следует из названия, этот сюжет фактически является продолжением предыдущего. Я выделил его в отдельный рассказ не потому, что здесь требуются какие-то новые идеи и методы (наоборот, те же самые), а потому, что параллелограммам Эйлера как правило вообще не уделяется внимания. Между тем это очень важный объект в треугольнике, который помогает быстро и просто решать на первый взгляд «гробовые» задачи. Многие задачи из предыдущего сюжета также допускают решение через параллелограммы Эйлера. Я рекомендую в этом убедиться.

5.1. Пусть O_A — середина отрезка AH. Докажите, что четырехугольники $AOMO_A$ и O_AOMH являются параллелограммами[7] (где O — центр описанной окружности, а M — середина стороны BC).

5.2. Решите задачи предыдущего сюжета, используя параллелограммы Эйлера.

5.3. Рассмотрим точки O_1, O_2 и O_3, симметричные точке O относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что прямые AO_1, BO_2 и CO_3 пересекаются в одной точке. Как называется эта точка?

5.4. Рассмотрим дугу $\smile M_AH_A$ окружности девяти точек, высекаемую на ней стороной BC. Докажите что градусная мера этой дуги равна $2|\beta-\gamma|$, где β и γ — углы треугольника ABC при вершинах B и C соответственно. *Докажите, что сумма градусных мер двух таких дуг равна градусной мере третьей дуги.

5.5. Докажите *формулу Эйлера*: $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

[7] Эти параллелограммы называются *первым* и *вторым параллелограммами Эйлера* соответственно.

Сюжет 6. Все об ортоцентре

В этом сюжете речь пойдет о свойствах ортоцентра треугольника. Многие его свойства уже встречались ранее (см. сюжеты об окружности, прямой и параллелограммах Эйлера). Ниже приводятся новые интересные свойства ортоцентра, как хорошо известные, так и совсем новые. Ортоцентр мы будем обозначать буквой H.

6.1. Рассмотрим прямоугольник, вписанный в окружность. Из произвольной точки окружности опустим перпендикуляры на стороны прямоугольника. Докажите, что основания этих перпендикуляров образуют полный четырехвершинник (т.е. любая точка является ортоцентром треугольника с вершинами в трех других точках). *Докажите аналогичное утверждение для пары взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через фиксированную точку окружности.

6.2. Докажите, что $AH^2 = 4R^2 - a^2$, где a — длина стороны BC, а R — радиус описанной окружности.

6.3. Рассмотрим вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть H_A — ортоцентр треугольника BCD. Аналогично определим точка H_B, H_C и H_D. Докажите, что $AB = H_AH_B$. *Докажите, что отрезки AH_A, BH_B, CH_C и DH_D пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

6.4. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на его описанной окружности. *Докажите, что точка, центрально симметричная ортоцентру относительно середины стороны треугольника, тоже лежит на его описанной окружности.

6.5. Докажите, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника HBC, равен радиусу окружности, описанному вокруг треугольника ABC.

6.6. Докажите, что прямые Эйлера треугольников HBC, AHC и ABH пересекаются в одной точке.

6.7. Рассмотрим три равные окружности, проходящие через одну точку H. Пусть A, B и C — вторые точки пересечения этих окружностей. Докажите, что H — ортоцентр треугольника ABC.

Сюжет 7. Вокруг биссектрис, «лапок» и точек вида W

Этот сюжет достаточно большой и включает в себя различные задачи, связанные с биссектрисами треугольника. При решении различных задач, предлагаемых ниже, основным инструментом являются лемма о точке I и теорема о «лапке» (точка W). Напомню, что *лемма о точке I* заключается в равенстве $\angle BIC = \frac{\pi+\alpha}{2}$; точка W — это точка пересечения биссектрисы треугольника с описанной окружностью; *теорема о «лапке»* гласит, что $WB = WC = WI = WI_A$. Если эти факты неизвестны решателю, я рекомендую доказать их, прежде чем решать задачи этого сюжета.

7.1. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O. Обозначим через M и N точки пересечения пар его противоположных сторон AB, CD и BC, AD соответственно. Докажите, что $\angle AOM = \angle CON$.

7.2. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, K и N соответственно. Пусть A' — точка пересечения отрезков MN и AI, а C' — точка пересечения отрезков KN и CI. Докажите, что точки A, A', C' и C лежат на одной окружности.

7.3. В обозначениях предыдущей задачи пусть P — точка пересечения BI и MN. Докажите, что угол $\widehat{BPC}$ прямой.

7.4. Рассмотрим вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть I_A — точка пересечения биссектрис треугольника BCD. Аналогично определим точка I_B, I_C и I_D. Докажите, что четырехугольник $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.

7.5. Пусть H_A — основание высоты треугольника ABC, опущенной на сторону BC, точки I и I_a — центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Докажите, что $\angle IH_AC = \angle I_aH_AC$.

7.6. Докажите, что точка пересечения биссектрис I в треугольнике ABC является ортоцентром треугольника $W_AW_BW_C$.

7.7. Рассмотрим окружность, описанную вокруг треугольника I_ABC, где точка I_A — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что ее центр лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7.8. Рассмотрим окружность, вписанную в угол $\widehat{BAC}$ и проходящую через точку I. Пусть она касается сторон угла в точках P и Q. Докажите, что отрезок PQ касается вписанной окружности треугольника ABC.

7.9. Пусть M — середина стороны BC. Докажите, что $MW = \frac{r_a - r}{2}$ (где r_a и r — радиусы вневписанной и вписанной окружностей соответственно).

7.10. Докажите, что длина t «лапки» (т.е. длина отрезка WB) вычисляется по формуле $t^2 = R(r_a - r)$.

7.11. Докажите формулы Эйлера:
a) $OI^2 = R^2 - 2Rr$;
b) $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$;
c) $II_a^2 = 4R(r_a - r)$.

7.12. Рассмотрим *полувписанную окружность* треугольника ABC, т.е. окружность, касающуюся сторон AB, AC в точках K и L и описанной окружности в точке V. Биссектриса угла $\widehat{BVC}$ пересекает отрезок KL в точке I. Докажите, что точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

7.13. Докажите, что радиус полувписанной окружности из предыдущей задачи равен $r_1 = \frac{r}{\cos^2 \alpha/2}$.

7.14. Обозначим через W^A точку пересечения биссектрисы *внешнего угла* при вершине A с описанной окружностью. Докажите *теорему о второй лапке*: $W^AB = W^AC = W^AI_B = W^AI_C$.

7.15. Пусть M — середина стороны BC. Докажите, что $MW_A = \frac{r_b + r_c}{2}$.

7.16. Докажите, что длина s «второй лапки» (т.е. длина отрезка W^AB) вычисляется по формуле $s^2 = R(r_b + r_c)$.

7.17. Докажите *вторую формулу Карно*: $r_a + r_b + r_c = r + 4R$. *Эта формула верна только для остроугольного треугольника. Сформулируйте и докажите аналог этой формулы для тупоугольного треугольника.

7.18. Пусть d_a, d_b и d_c — расстояния от точки O до середин сторон треугольника ABC. Докажите *первую формулу Карно*: $d_a + d_b + d_c = r + R$. *Эта формула верна только для остроугольного треугольника. Сформулируйте и докажите аналог этой формулы для тупоугольного треугольника.

Сюжет 8. Перпендикулярные хорды в окружности

Основой для задач этого сюжета является, казалось бы, совсем простая конфигурация, связанная со взаимно перпендикулярными хордами в окружности. Однако многие задачи из этой серии обладают большим количеством решений, а некоторые, типа задачи Архимеда, давно стали классическими. Приводимые ниже задачи слабо связаны друг с другом, поэтому можно решать их в произвольном порядке.

8.1. Рассмотрим *арбелос*, т.е. три попарно касающиеся полуокружности с центрами на одной прямой. Пусть точки A, B и C являются точками касания этих полуокружностей. Отрезок BH перпендикулярен AC, а отрезок KL — общая внешняя касательная малых полуокружностей. Докажите, что $BH = KL$.

8.2. Докажите, что проекция диаметра окружности на ее хорду высекает на ней равные отрезки.

8.3. Пусть две перпендикулярные хорды делятся точкой пересечения на отрезки длины a, b, c и d. Докажите *формулу Архимеда*: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$.

8.4. Рассмотрим окружность с диаметром AB. Пусть O — произвольная точка окружности. Проведем вторую окружность с центром в точке O, касающуюся диаметра AB в точке K и пересекающую первую окружность в точках P и Q. Докажите, что отрезок PQ делит радиус OK пополам.

8.5. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ со взаимно перпендикулярными диагоналями, вписанный в окружность. Обозначим через P точку пересечения его диагоналей, а через H_1 — основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на сторону AB. Докажите, что прямая PH_1 пересекает противоположную сторону четырехугольника в ее середине.

8.6. Докажите, что середины сторон четырехугольника из предыдущей задачи и основания перпендикуляров лежат на одной окружности.

Сюжет 9. Теорема Чевы, или проективная геометрия

В данном сюжете присутствуют задачи, в которых основная конфигурация — три отрезка в треугольнике, пересекающиеся в одной точке. Казалось бы, естественно, что основным инструментом для решения этих задач должна была бы быть теорема Чевы. Приводимые ниже задачи действительно решаются с помощью теоремы Чевы, однако *значительно* более простое их решение может быть получено с помощью... проективной геометрии.

9.1. В треугольнике ABC проведена медиана AM. На ней отмечена произвольная точка N, через которую проведены чевианы BK и CL. Отрезок KL пересекает медиану AM в точке P. Докажите, что точка P — середина отрезка KL.

9.2. В треугольнике ABC проведена высота AH. На ней отмечена произвольная точка N, через которую проведены чевианы BK и CL. Докажите, что высота AH — биссектриса угла $\widehat{KHL}$.

9.3. В треугольнике ABC проведена чевиана AP. На ней отмечена произвольная точка N, через которую проведены чевианы BK и CL. Прямые PK и PL пересекают прямую, параллельную стороне BC и проходящую через вершину A, в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AX = AY$. Теперь попробуйте решить предыдущую задачу.

Сюжет 10. Точка Торичелли

Этот сюжет посвящен классической теме, связанной с точкой Торичелли. Однако я предлагаю несколько подходов к доказательству основного свойства точки Торичелли, что позволяет продемонстрировать некоторые интересные конструкции, связанные с это замечательной точкой. Напомню, что *точкой Торичелли* называется точка T треугольника, из которой каждая из сторон треугольника видна под углом $\frac{2\pi}{3}$. Во всех задачах предполагается, что точка Торичелли существует. Можно доказать (попробуйте это сделать), что точка Торичелли существует в любом треугольнике с углами, меньшими $\frac{2\pi}{3}$.

10.1. Рассмотрим правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1, построенные на сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону. Докажите, что окружности, описанные вокруг правильных треугольников, пересекаются в одной точке. *Подумайте, что будет, если строить треугольники вовнутрь.

10.2. Докажите, что центры O_A, O_B и O_C правильных треугольников, построенных в предыдущей задаче, образуют правильный треугольник[8].

10.3. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке Торичелли T.

10.4. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = AT + BT + CT$.

10.5. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки в правильном треугольнике до его сторон постоянно.

10.6. Докажите, что сумма расстояний от точки X до вершин треугольника ABC минимальна тогда и только тогда, когда $X = T$ — точка Торичелли[9].

P.S.
— Зачем читать всю эту ерунду, — прервал ее Квази, — если ты все равно не можешь ничего объяснить?

Льюис Кэрролл, «Алиса в Стране Чудес».

[8] Этот треугольник называется *треугольников Наполеона*, хотя утверждение задачи впервые было доказано Лапласом.

[9] Попробуйте придумать два решения: одно — с помощью задачи **10.4**, второе — с помощью задачи **10.5**.