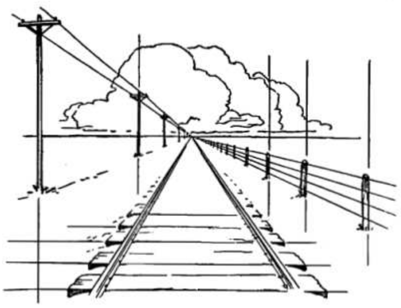
Проективная геометрия во Второй школе

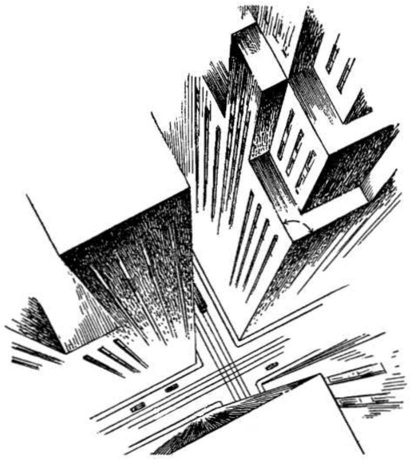
И. Д. Жижилкин, К. В. Козеренко, А. И. Малахов

Оглавление

Предисловие



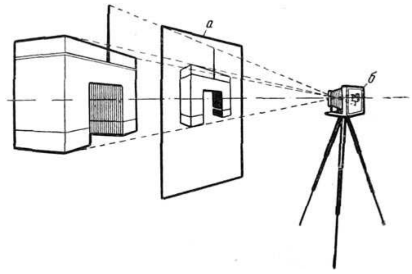
Каким мы видим окружающий нас мир? Дальние объекты нам кажутся мелкими, ближние — крупными, а железнодорожные рельсы — сходящимися к горизонту. На изображении куба ребра не только не образуют прямых углов, но даже не лежат на параллельных прямых. На фотографии высотного здания, сделанной с близкого расстояния, контуры ощутимо сжимаются.



Евклидова геометрия не в состоянии объяснить эти явления. Там параллельные прямые не пересекаются, а углы при допустимых преобразованиях сохраняются. Адекватной математической моделью в данном случае является центральная проекция.

Изучение центральной проекции начали художники еще в XIV - XV вв. Они хотели, чтобы изображение на холсте совпадало с тем, что мы реально видим. Очень скоро была решена задача построения так называемого перспективного изображения. Для этого были разработаны наборы эмпирических правил, составлены сборники внутрицеховых ремесленных рецептов. Потом за дело взялись математики, что привело, во-первых, к открытию новых замечательных фактов, а, во-вторых, к глубоким обобщениям, позволившим, например, А. Кэли в конце XIX века сказать, что проективная геометрия — это вся геометрия.

В этой книге мы познакомимся с основными понятиями, теоремами и конструкциями проективной геометрии. Предполагается при этом, что читатель хотя бы отчасти владеет основными понятиями линейной алгебры, то есть знает, по крайней мере, что такое векторное пространство, базис и линейное преобразование. Поскольку авторы много лет преподают математику в лицее «Вторая школа», предполагаемый читатель больше всего похож на неравнодушного к математике старшеклассника или первокурсника.



Но есть еще одна важная цель, которую авторы ставили перед собой, задумав написать эту книгу.

Во второй половине XIX века произошло событие, сопоставимое по своему историческому и цивилизационному значению с появлением в Древней Греции дедуктивной математической системы. Математики начали понимать, что должно быть позволено рассуждать об объектах, не имеющих никакой наглядной или чувственной интерпретации. В 1870 году получила признание геометрия Лобачевского. Это произошло после того, как Феликс Клейн обнаружил в одной работе Артура Кэли «модель», позволяющую отождествить объекты и соотношения геометрии Лобачевского с некоторыми объектами и соотношениями евклидовой геометрии. Этим он доказал, что геометрия Лобачевского непротиворечива в той же мере, что и евклидова, — противоречие в одной из них необходимо влечет противоречие в другой. В 1872 году почти одновременно Кантор, Дедекинд и Вейерштрасс дали определение (правда, довольно различными методами) вещественного числа, затем Вейерштрасс предложил идею введения отрицательных чисел в виде классов пар натуральных чисел, и, наконец, в 1888 году Дедекинд сформулировал полную систему аксиом для арифметики (аксиомы Пеано). В геометрии похожие процессы завершились выходом в 1899 году книги Гильберта «Основания геометрии», где он объяснил, что прямая, точка и плоскость появляются только в связи с теми аксиомами, которые для них выбираются. Другими словами, назвать ли их точками, прямыми, плоскостями или же столами, стульями, пивными кружками, — это будут те объекты, для которых справедливы соотношения, выражаемые аксиомами. *Родился новый формальный язык! И новая интуиция!* Теперь «интуиция отнюдь не обязательно имеет пространственную или чувственную природу, как часто думают, а скорее представляет собой некоторое *знание поведения математических объектов*, часто прибегающее к помощи образов самой различной природы, но основанное прежде всего на повседневном знакомстве с этими объектами» (Бурбаки).

Вследствие такого развития науки в математическом образовании появились разрывы. Точка разрыва — это неверно сформированная интуиция или, иными словами, это разрыв в математической культуре. Точки разрыва в математическом образовании сильно снижают его уровень и качество. В математике есть теории и понятия (общая топология, линейная алгебра, абстрактная алгебра и др.) необходимые для построения других теорий. Очень часто эти предварительные теории в математике излагаются формально и при этом без каких-либо мотивировок. Но самое страшное что, как правило, эти формальные конструкции обрушиваются на голову совершенно не подготовленного к ним бывшего школьника. Не подготовленного потому, что «школьная» математика конкретна. Там почти нет возможности познакомиться с формальным языком изложения. А к формальному языку надо еще привыкнуть, надо уметь его узнавать, надо выработать соответствующую интуицию. На это нужно время.

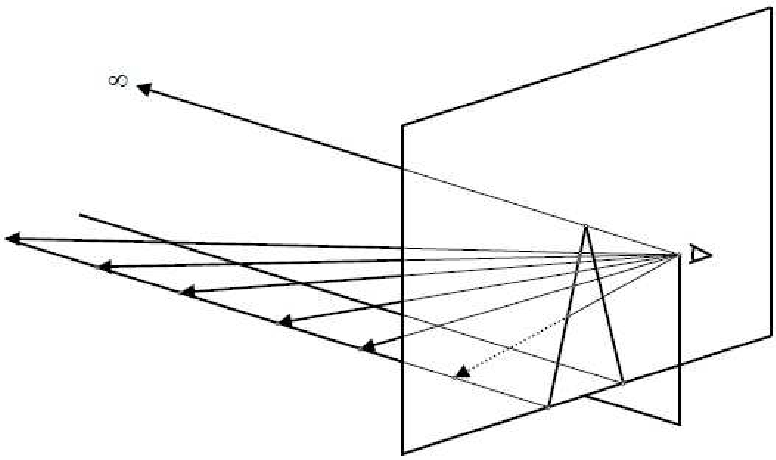
Так вот проективная геометрия, играя роль своего рода мостика между школой и вузом, дает уникальную возможность познакомиться с некоторым формальным языком и увидеть как с помощью этого языка можно построить содержательную теорию. В книге чередуются алгебраические и геометрические главы, и большинство фактов рассматриваются с двух сторон. Кроме того, нам жаль, что проективная геометрия, столь популярная в XIX веке, сегодня стала «ничьей землей». Для средней школы — слишком сложно, для инженеров — не слишком нужно, а на математических факультетах курс, как правило «читают» формально-алгебраически, оставляя в стороне собственно геометрию. Авторы попытались устранить этот пробел, написав книгу, которую сами хотели бы прочитать.

И. Д. Жижилкин, К. В. Козеренко, А. И. Малахов

Глава I

Проективная плоскость

Попробуем, например, изобразить на плоскости холста две параллельные прямые (рельсы, лежащие на земле). Главное требование: сделать так, чтобы лучи, проведенные от глаза к изображению на холсте, шли точно так же, как лучи, проведенные от глаза к двум лежащим на земле рельсам. Точка, в которой находится глаз, будет центром проекции. Проведем из нее прямые к точкам, лежащим на рельсах. Эти прямые пересекут плоскость картины, и точки пересечения образуют изображение рельс. Однако прямые изображения не будут параллельными. Они пересекутся в некоторой точке. Ясно, что эта точка на холсте не соответствует никакой точке на земле (рельсы, конечно, не пересекаются).



В самом деле, луч, проходящий через точку пересечения прямых на холсте, параллелен земле и рельсам. Чтобы точка на холсте была как можно ближе к точке пересечения, соответствующая ей точка на рельсе должна уйти как можно дальше от плоскости холста. Чем дальше мы отодвигаем эту точку по рельсу, тем ближе ее изображение к точке пересечения на холсте. Но попасть в эту «фиктивную» точку, очевидно, невозможно. Можно лишь подойти к ней как угодно близко, отодвигая точку на рельсе «в бесконечность».

Теперь совершенно ясно, откуда берется стандартная фраза из книг по проективной геометрии: «Будем считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке». Геометры XIX века, начиная с Понселе, («Трактат о проективных свойствах фигур», 1822) добавляли к обычной евклидовой плоскости так называемые идеальные (бесконечно удаленные) элементы, не имея в виду при этом никакой геометрической интерпретации. Однако, на обычной евклидовой плоскости нет никаких «идеальных» элементов и непонятно, где их взять, чтобы расширить плоскость. Поступают следующим образом: рассматривают обычную евклидову плоскость (землю), некоторую точку, ей не принадлежащую, и пучок прямых, проходящих через эту точку. Каждой точке земли соответствует одна прямая пучка. Точкам земли, лежащим на одной прямой, соответствуют прямые пучка, лежащие в одной плоскости. Однако, в этом пучке есть прямые, параллельные земле и эти прямые лежат в одной плоскости. Вместо того, чтобы добавлять «бесконечно удаленную» прямую, соответствующую параллельной плоскости, дадим формальное

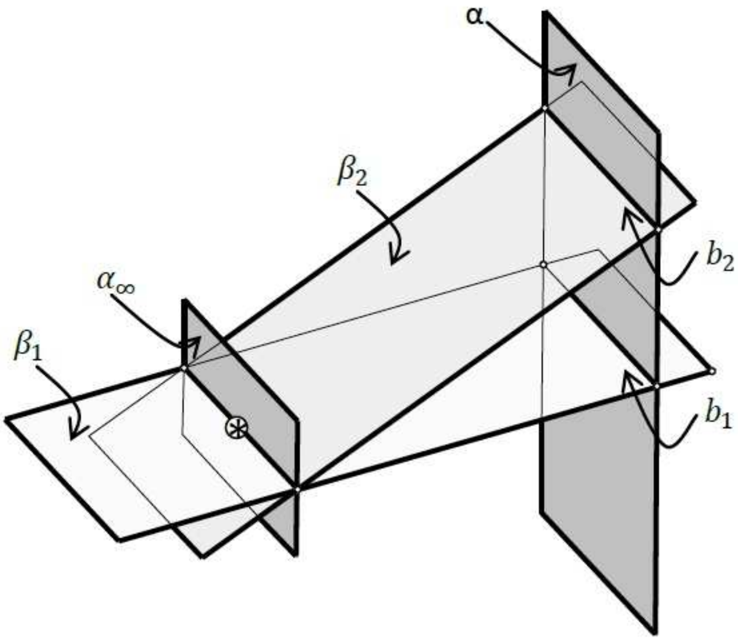
Определение. Пусть $\{\mathbb{E}^3, *\}$ — евклидово пространство с отмеченной точкой (звездочкой). Проективной плоскостью называется множество всех прямых, проходящих через отмеченную точку. Эти прямые получают новое имя: теперь они будут называться проективными точками, проективной же прямой мы назовем евклидову плоскость, тоже проходящую через отмеченную точку. Проективную плоскость будем обозначать через $\mathbf{P}(\mathbb{E}^3)$.

Замечание. Данное определение, разумеется, не позволяет сформировать наглядный образ проективной плоскости. От него это и не требуется. Здесь преследуется другая цель — строгость, поскольку «рассуждения лишь тогда приобретут доказательную силу, когда строгость будет предварительно внесена в определения» (Пуанкаре). Наглядный же образ будет постепенно формироваться по мере углубления в предмет. Исторически все было наоборот: к этому формальному определению пришли, отталкиваясь как раз от наглядных представлений.

Замечание. В пространстве $\mathbb{E}^3$ задано расстояние и мера угла, что не требуется для определения проективной плоскости. Позже (см.), используя векторный язык, мы уточним это определение.

1. Аффинная карта проективной плоскости

Определение. Аффинной картой проективной плоскости называется плоскость в пространстве $\mathbb{E}^3$, не содержащая отмеченную точку.



Пусть α — одна из аффинных карт. Через α_∞ обозначим евклидову плоскость, содержащую отмеченную точку и параллельную карте α. В соответствии с определением предыдущего пункта α_∞ является проективной прямой, которую мы будем называть бесконечно удаленной проективной прямой аффинной карты α.

Произвольная проективная прямая β, отличная от прямой α_∞, пересекает карту α по евклидовой прямой b. В этом случае мы будем говорить, что прямая b есть изображение проективной прямой β на карте α. Если проективная точка a пересекает карту α в точке A, то эту точку мы будем называть изображением проективной точки на аффинной карте α. Эти соглашения объясняют, в частности, почему прямая, проходящая через отмеченную точку, называется в проективной геометрии проективной точкой, а плоскость, проходящая через отмеченную точку, проективной прямой.

Заметим, что проективные точки проективной прямой α_∞ не имеют изображений на карте α.

Рассмотрим теперь две проективные прямые β_1 и β_2, изображения которых b_1 и b_2 на карте α параллельны, т.е. пусть

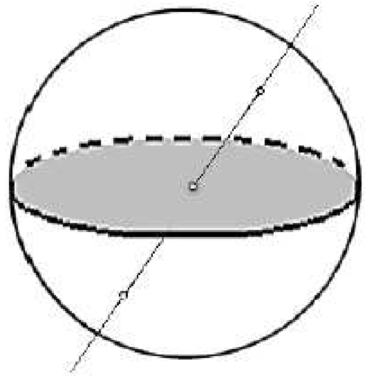
$$b_1 = \beta_1 \cap \alpha, \quad b_2 = \beta_2 \cap \alpha, \quad b_1 \parallel b_2.$$

Положим $a = \beta_1 \cap \beta_2$. Очевидно, что $a \parallel \alpha$, т.е. $a \subset \alpha_\infty$.

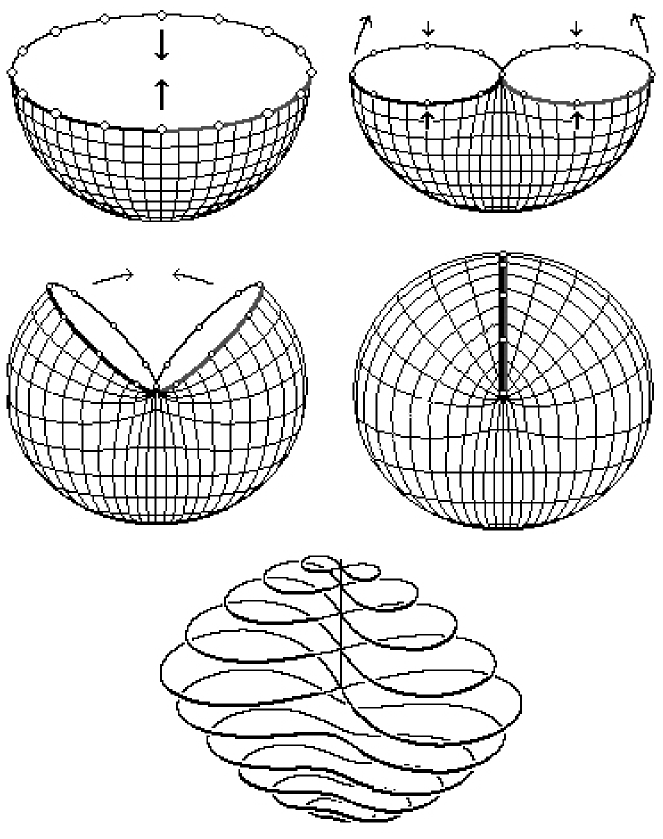
Классики проективной геометрии (Дезарг, Паскаль, Понселе и др.) вместо проективной плоскости рассматривали ее аффинную карту, но при этом говорили, что параллельные прямые b_1 и b_2 «пересекаются в бесконечно удаленной точке a». Слово бесконечность они употребляли, по всей видимости, для того, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, которое мы отразили в формуле $a \parallel \alpha$ (пересечение параллельных прямых не изображается на карте α, а лежит, так сказать, «в бесконечности»). Вся эта мистика с бесконечностью исчезает благодаря соответствующим определениям. Более того, на рисунке этого пункта мы изобразили и бесконечно удаленную точку a, и бесконечно удаленную проективную прямую α_∞. Следуя традиции, мы только сохранили их старые названия.

2. Сферическая модель проективной плоскости

Определение. Сферической моделью проективной плоскости называется сфера произвольного радиуса с центром в отмеченной точке пространства $\mathbb{E}^3$.



Каждая проективная точка проективной плоскости пересекает сферическую карту в двух диаметрально противоположных точках. Имея это в виду, говорят, что проективная плоскость есть сфера, диаметрально противоположные точки которой эквивалентны. Такое представление проективной плоскости вызывает непреодолимое желание склеить, так сказать, эти эквивалентные точки и посмотреть как выглядит проективная плоскость. Проведем мысленный эксперимент. Рассмотрим плоскость в пространстве $\mathbb{E}^3$, проходящую через отмеченную точку (проективную прямую). Эта плоскость пересечет сферическую карту по окружности. Назовем эту окружность экватором. Экватор делит сферу на две полусферы. Одну из них назовем северной полусферой, другую — южной. Каждая проективная точка изображается либо двумя точками экватора, либо точкой в южной полусфере. Считая, что южная полусфера изготовлена из тонкой резины (как воздушный шарик), растянем ее, сближая эквивалентные точки экватора до тех пор, пока они не совпадут. После того, как эквивалентные точки совпали, склеим их. На рисунке изображена последовательность указанных действий.



1. Сначала разрезали сферу плоскостью и удалили северную полусферу.

2. Сблизили эквивалентные точки.

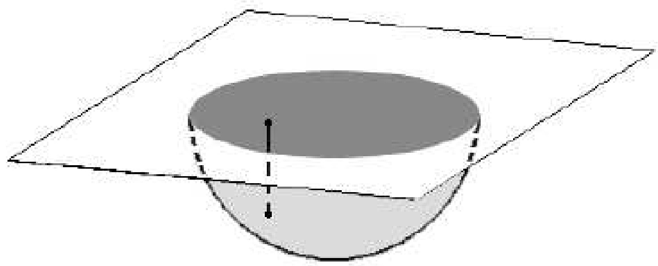
3. Склеили эквивалентные точки.

Таким образом, оказывается, что проективная плоскость есть самопересекающаяся поверхность («скрещенный колпак») в трехмерном пространстве $\mathbb{E}^3$. Известно, что вложить проективную плоскость в трехмерное пространство без самопересечений нельзя, однако этим уже занимается дифференциальная топология.

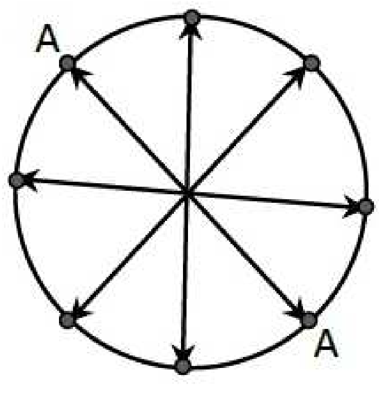
Замечание. Несмотря на невозможность вложить проективную плоскость в трехмерное пространство, она является такой же «равноправной» двумерной поверхностью, как, скажем, сфера или тор. Геометрические объекты существуют независимо от возможности вложить их куда-либо, и независимо от этой возможности их необходимо изучать. Именно в этом состоит главная мотивировка введения и изучения абстрактных многообразий. В главе II мы поговорим об одном из способов изучения двумерных поверхностей

3. Модель проективной плоскости в виде круга

В этом пункте мы не будем склеивать точки экватора южной полусферы, как в предыдущем пункте. Вместо этого рассмотрим ортогональную проекцию южной полусферы на плоскость экватора. Точки южной полусферы при этой проекции попадут внутрь круга, границей которого является экватор.

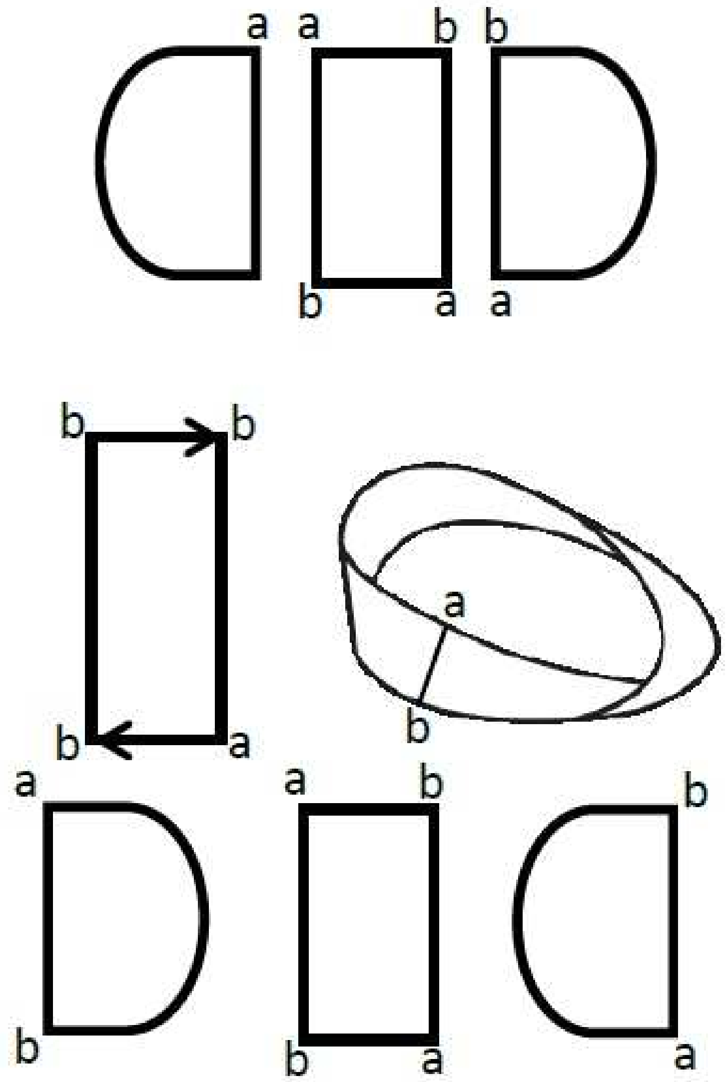


В результате мы получим представление проективной плоскости в виде круга, причем диаметрально противоположные точки границы этого круга эквивалентны.



Рассмотрим теперь две точки a и b на границе круга. Разрежем круг по двум хордам, соединяющим эти точки. Круг распадется на три части: два сегмента и среднюю часть, которая, как нетрудно сообразить, является лентой Мебиуса.

Деформируем оба сегмента, превратив хорды в дуги, а дуги в хорды. Склеим эквивалентные точки сегментов, которые после деформации оказались на хордах. Получим новый круг, точки границы которого есть точки разреза. Теперь исходный круг (модель проективной плоскости) разбит на две части: ленту Мебиуса и круг, причем точки границ



ленты Мебиуса и круга эквивалентны. Таким образом, проективная плоскость есть лента Мебиуса, к границе которой приклеен круг.

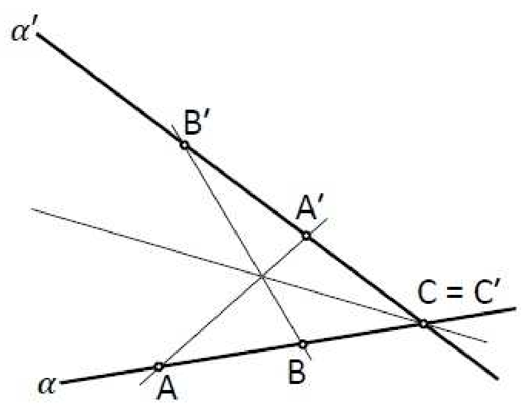
Поскольку лента Мебиуса является односторонней поверхностью, следовательно, и проективная плоскость имеет только одну сторону. Удивительное дело: как и сфера проективная плоскость не имеет границы, но в отличие от сферы является односторонней поверхностью. В курсе дифференциальной геометрии то, о чем мы сейчас говорим, формализуется термином ориентация. Итак, проективная плоскость доставляет пример неориентируемой замкнутой поверхности.

Замечание. В связи с рассмотрением проективной плоскости возникает следующий естественный вопрос: а какие вообще бывают замкнутые двумерные поверхности? Какова их классификация? Подобные задачи являются одними из ключевых в математике. Изучая те или иные объекты, например, многообразия, функции, дифференциальные уравнения вы, грубо говоря, приходите к необходимости определить, какие объекты вы считаете различными, а какие не отличаете. Что значит «не отличате» или, иными словами, «считаете равными»? Два объекта называются равными, если существует соответствующее преобразование (аналог движения евклидовой геометрии), которое переводит один объект в другой. Какие преобразования естественным образом переводят одну поверхность в другую? Со временем мы ответим на этот вопрос и вернемся к классификации замкнутых двумерных поверхностей.

4. Отрезок и луч в проективной геометрии

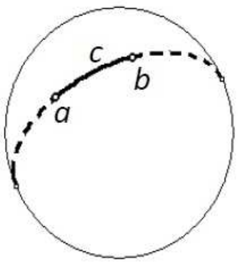
Оказавшись на проективной плоскости надо хорошенько запомнить одно правило: здесь привычные наглядные образы евклидовой геометрии не работают. Вот один из самых ярких примеров. В евклидовой геометрии из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими. В проективной геометрии дело обстоит не так. Проективная прямая замкнута. Поэтому нельзя сказать, что одна из трех точек прямой лежит между двумя другими.

Замечание. С топологической точки зрения проективная прямая является не чем иным, как окружностью.

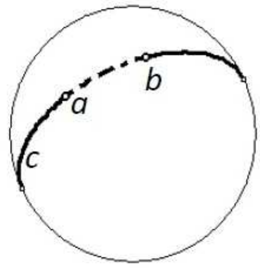


Рассмотрим три проективные точки a, b, c на проективной прямой и две аффинные карты α и α'. Обозначим через A, B, C изображения прямых a, b, c на карте α, а через A', B', C' их же изображения на карте α'. На этом рисунке видно, что на карте α точка B лежит между точками A и C, а на карте α' точка A' лежит между точками B' и C'.

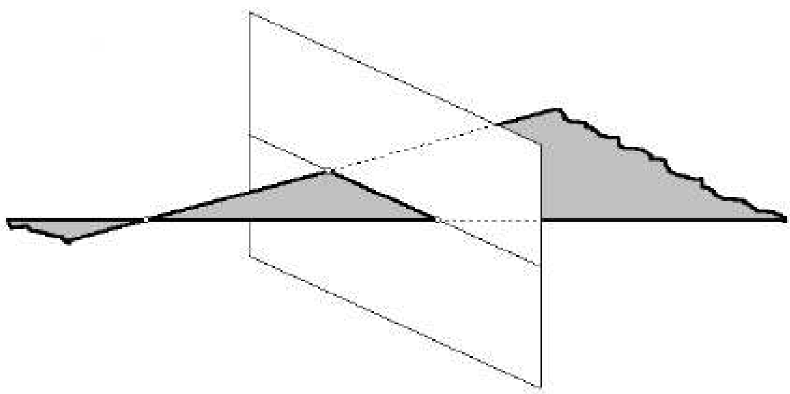
Для человека, воспитанного на евклидовой геометрии, естественно после этого спросить: а как обстоит дело с отрезком и лучом в проективной геометрии? Для ответа на эти вопросы удобно воспользоваться моделью проективной плоскости в виде круга. Тогда очевидно, что точка не разбивает проективную прямую на две части. Поэтому аналога евклидова луча в проективной геометрии нет, а, следовательно, нет и аналога евклидового угла. Нет смысла в проективной геометрии говорить и о «полуплоскостях», поскольку проективная прямая не делит проективную плоскость на две части.



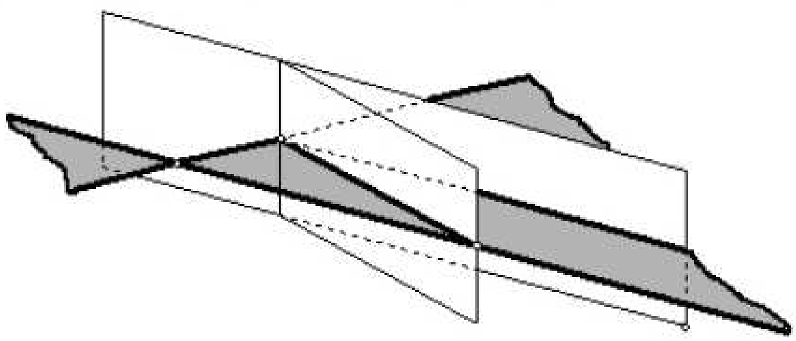
Две же точки разбивают проективную прямую на два куска, каждый из которых можно назвать проективным отрезком. Чтобы отличить один отрезок от другого, нужно указать еще одну его точку, поэтому в проективной геометрии отрезок обозначается тремя точками (acb на рисунках).

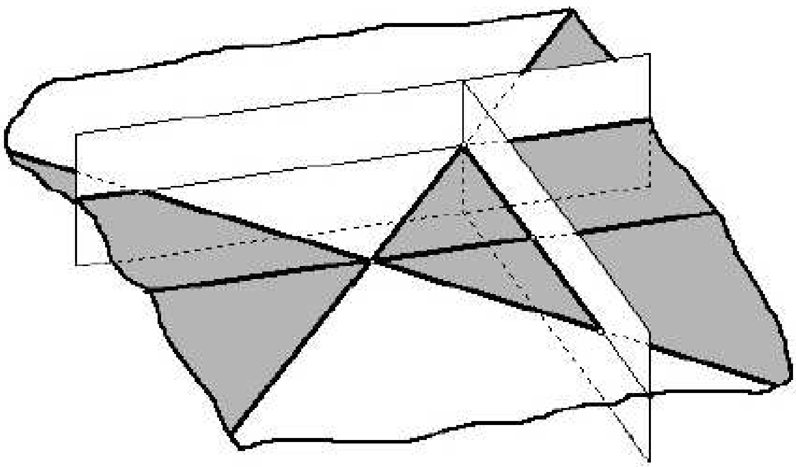


Заметим, что на одной аффинной карте проективный отрезок может изображаться аффинным отрезком, а на другой карте это же множество точек может изображаться лучом или даже двумя непересекающимися лучами, лежащими на одной прямой, с различными начальными точками. На рисунках ниже представлены все три случая.

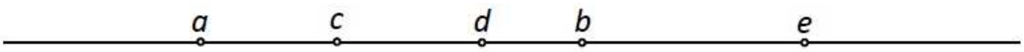


Наоборот, можно показать, что если на карте β некоторое множество проективных точек изображается в виде луча или двух лучей, лежащих на одной прямой, то это множество есть отрезок. Для





дальнейшего нам будет удобно следующее понятие.

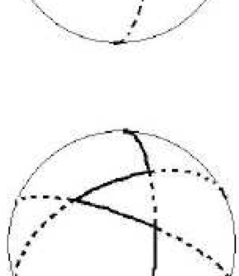


Определение. Пусть точка d принадлежит отрезку acb, а точка e — не принадлежит. Тогда будем говорить, что пара точек c и d не разделяет пару точек a и b, а пара точек c и e — разделяет точки a и b.

5. Треугольник в проективной геометрии

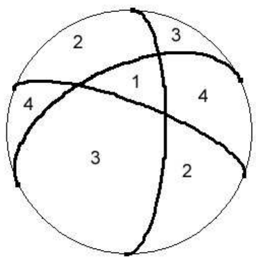
Здесь нас тоже ждут сюрпризы, но после предыдущего пункта это уже не должно казаться удивительным.

Рассмотрим три произвольные проективные точки, не лежащие на одной прямой и три проективные прямые, проходящие через эти точки. Выделим на каждой прямой по отрезку. Получим замкнутую ломаную из трех звеньев. Естественно, эту ломаную



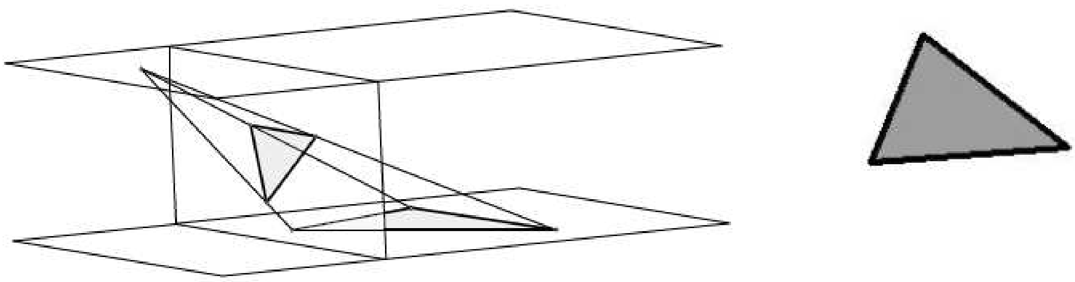
назвать «проективным треугольником». Заметим? что мы получили треугольники двух типов: треугольники первого типа разделяют проективную плоскость на две части, а треугольники второго типа не разделяют. Кроме того, можно показать что для треугольников второго типа существует проективная прямая, которая пересекает все три стороны треугольника, для треугольников же первого типа такой прямой не существует.

Заметим, что три проективные точки задают четыре проективных треугольника. Особенно хорошо эти четыре треугольника можно увидеть на сферической модели проективной плоскости.



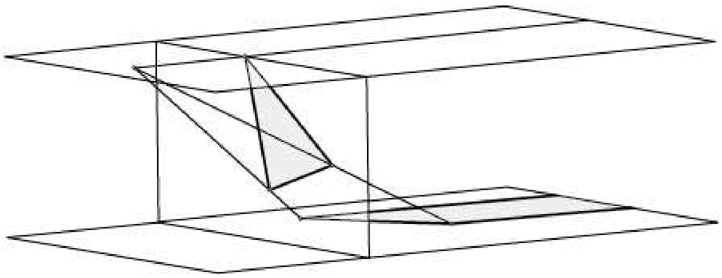
Посмотрим на то, как изображается проективный треугольник на аффинных картах. Пусть α — карта, на которой проективный треугольник изображается аффинным треугольником. Рассмотрим другую карту β.

Если бесконечноудаленная проективная прямая β_∞ и треугольник на карте α не пересекаются, то на карте β треугольник изображается тоже аффинным треугольником

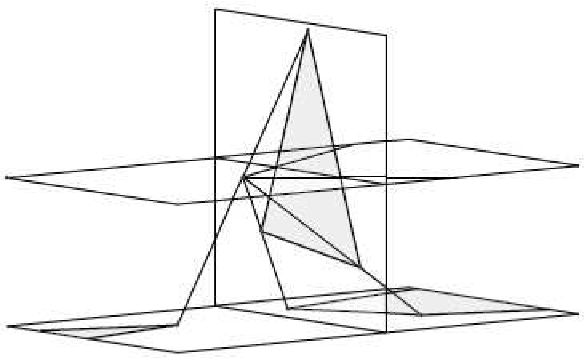


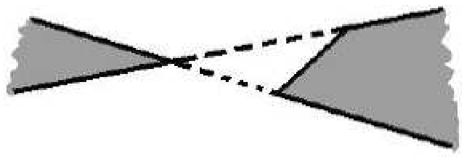
Если β_∞ пересекает треугольник на карте α в одной вершине, то изображение треугольника на карте β выглядит так, как на рисунке ниже.

И, наконец, если β_∞ пересекает треугольник на карте α по отрезку, не содержащему ни одной вершины этого треугольника, то



изображение треугольника на карте β представлено ниже





Итак, мы рассказали о том, что такое проективная плоскость, проективные прямые, отрезки и треугольники. Что же осталось? Существует ли в проективной геометрии аналог евклидовой окружности и евклидова движения? Найти аналог движения особенно важно, поскольку, согласно Эрлангенской программе Клейна, это необходимо для того, чтобы проективная геометрия имела право называться геометрией. Кроме того, совершенно непонятно как сказать, что такое проективное пространство. Ведь для того, чтобы определить проективную плоскость, мы использовали евклидово трехмерное пространство. Стало быть, следуя той же схеме, для определения проективного пространства нам понадобилось бы «евклидово пространство размерности четыре».

Глава II

Топология проективной плоскости

Прежде чем приступать к исследованию проективной геометрии, которая разворачивается на просторах проективной плоскости, интересно взглянуть на проективную плоскость как на единое целое. В предыдущей главе мы отметили, что проективная плоскость доставляет пример неориентируемой замкнутой двумерной поверхности. Уместным будет задать вопрос, какие вообще бывают замкнутые двумерные поверхности? Что отличает одну от другой? Какие существуют способы исследования таких объектов?

Если обратиться к примерам, то первое, что, наверное, приходит в голову, это сфера.

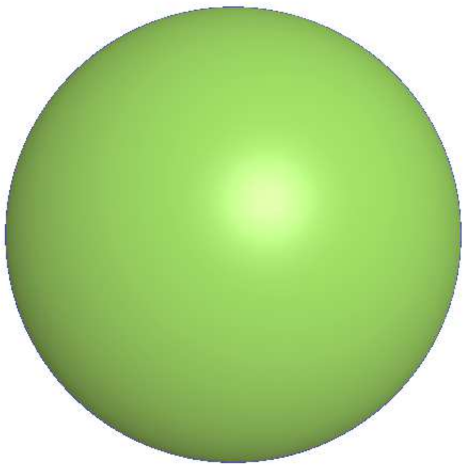


Рис. . Сфера

После недолгих размышлений можно привести примеры, выражаясь кулинарными терминами, бублика (он же тор) и кренделя.

Где две «дырки», там и три.

Интуитивно нам совершенно ясно, что тор и сфера - это разные поверхности. Нельзя одну «превратить» в другую. Что значит «превратить»? В математике каждый термин имеет строгое определение. В данном случае речь идет о непрерывном взаимно однозначном пре-

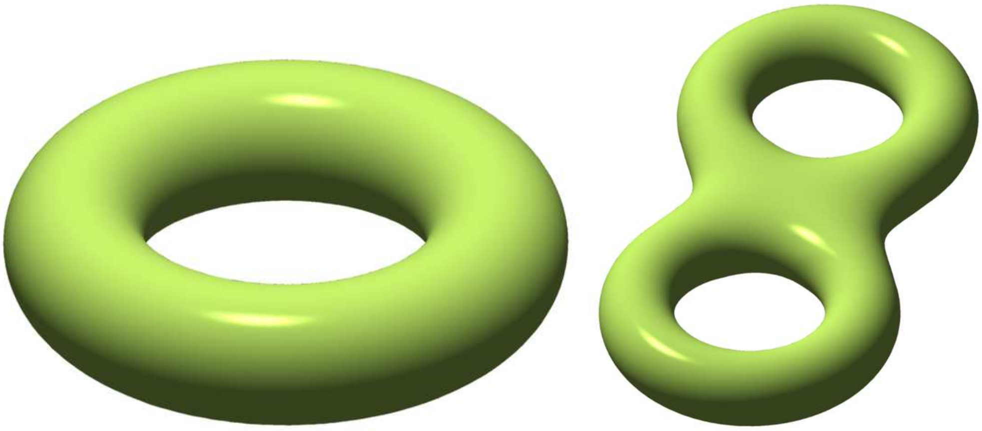


Рис. . Тор и крендель

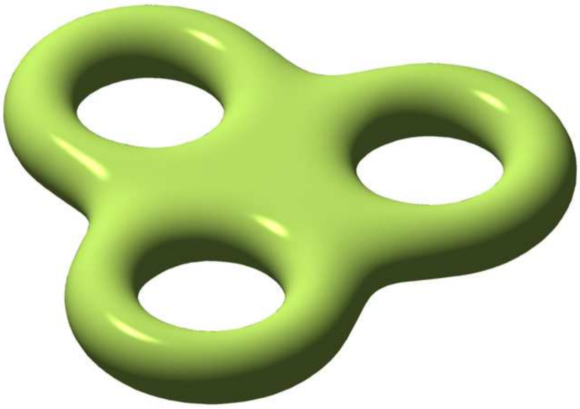


Рис. . Сфера

образовании (гомеоморфизме) одной поверхности в другую. Иными словами, представьте, что поверхность сделана из очень эластичной резины, и вы можете ее деформировать. Запрещены разрывы и самопересечения.

Рис. . Сфера

Определение. Пусть W — подпространство размерности n векторного пространства V. Тогда множество

$$\alpha = W + a,$$

где a — ненулевой вектор из V, называется *аффинной картой* проективного пространства PV. Само подпространство W называется бесконечно удаленным по отношению к аффинной карте α и обозначается α_∞.

Если проективная точка $\widehat{x}$ (прямая в пространстве V) пересекает карту α в точке X, будем говорить, что точка $X = \alpha \cap \widehat{x}$ служит изображением проективной точки $\widehat{x}$ на карте α. Однако, не у каждой точки проективного пространства PV есть изображение на карте. Прямые, лежащие в подпространстве α_∞, параллельны карте, и у них нет изображений. Говорят, что эти точки по отношению к данной карте являются бесконечно удаленными.

1. Однородные и неоднородные координаты

Определение. Пусть

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_{n+1} e_{n+1},$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ — некоторый базис пространства V. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ называются *однородными координатами* проективной точки $\widehat{x} \in PV$.

Слово «однородные» связано с тем, что координаты точки определены лишь с точностью до пропорциональности, то есть числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ и $\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{n+1}$ являются координатами одной и той же точки $\widehat{x}$. Заметим также, что базисы $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ и $\lambda e_1, \lambda e_2, \ldots, \lambda e_{n+1}$ задают одни и те же однородные координаты. Отметим еще, что однородные координаты не могут быть равны нулю одновременно. Точка с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ обозначается $(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$.

Стоит отметить, что для аффинной карты α можно выбрать удобный базис такой, что $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1} \in \alpha$. В этом случае однородные координаты точки $X \in \alpha$ называются *барицентрическими координатами* (Мебиус, «Барицентрическое исчисление», 1827). Поскольку в выбранном базисе плоскость α задается уравнением

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 1,$$

сумма барицентрических координат равна 1. Барицентрические координаты точки X на карте имеют простой физический смысл. Если обозначить изображения точек

$$\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \ldots, \widehat{e}_{n+1}$$

на карте α через $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$, то координаты $(\mu_1 : \mu_2 : \ldots : \mu_{n+1})$ — это массы, которые надо поместить в точки $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$, чтобы центр масс полученной системы точек попал в точку $X(\mu_1 : \mu_2 : \ldots : \mu_{n+1})$, при этом $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n+1} = 1$ («барос» по-гречески значит вес, тяжесть, значит «барицент» — это центр тяжести). Если же вспомнить, что эти координаты являются коэффициентами разложения вектора x в некотором базисе, то ясно, что наборам масс таким, что $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n+1} = 1$ соответствуют бесконечно удаленные точки.

Пусть α — одна из аффинных карт. Через α^∞ обозначим евклидову плоскость, содержащую отмеченную точку и параллельную карте α. В соответствии с определением предыдущего пункта α^∞ является проективной прямой, которую мы будем называть бесконечно удаленной проективной прямой аффинной карты α.

Произвольная проективная прямая β, отличная от прямой α^∞, пересекает карту α по евклидовой прямой b. В этом случае мы будем говорить, что прямая b есть изображение проективной прямой β на карте α. Если проективная точка a пересекает карту α в точке A, то эту точку мы будем называть изображением проективной точки на аффинной карте α. Эти соглашения объясняют, в частности, почему прямая, проходящая через отмеченную точку, называется в проективной геометрии проективной точкой, а плоскость, проходящая через отмеченную точку, проективной прямой.

Заметим, что проективные точки проективной прямой α^∞ не имеют изображений на карте α.

Рассмотрим теперь две проективные прямые β_1 и β_2, изображения которых b_1 и b_2 на карте α параллельны, т.е. пусть

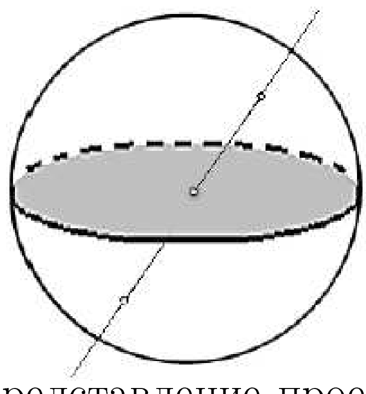
$$b_1 = \beta_1 \cap \alpha, \quad b_2 = \beta_2 \cap \alpha, \quad b_1 \parallel b_2.$$

Положим $a = \beta_1 \cap \beta_2$. Очевидно, что $a \parallel \alpha$, т.е. $a \subset \alpha^\infty$.

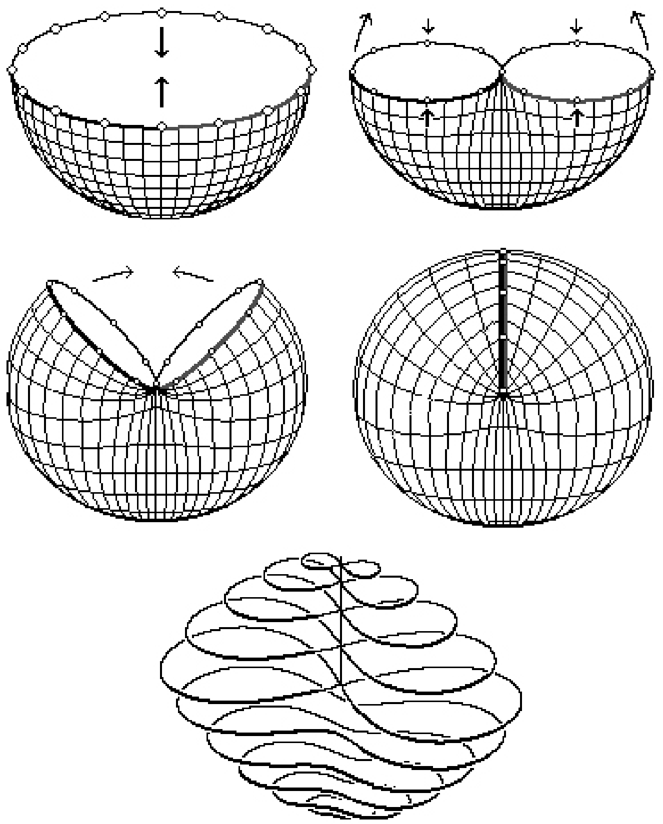
Классики проективной геометрии (Дезарг, Паскаль, Понселе и др.) вместо проективной плоскости рассматривали ее аффинную карту, но при этом говорили, что параллельные прямые b_1 и b_2 «пересекаются в бесконечно удаленной точке a». Слово бесконечность они употребляли, по всей видимости, для того, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, которое мы отразили в формуле $a \parallel \alpha$ (пересечение параллельных прямых не изображается на карте α, а лежит, так сказать, «в бесконечности»). Вся эта мистика с бесконечностью исчезает благодаря соответствующим определениям. Более того, на рисунке этого пункта мы изобразили и бесконечно удаленную точку a, и бесконечно удаленную проективную прямую α^∞. Следуя традиции, мы только сохранили их старые названия.

2. Сферическая модель проективной плоскости

Определение. Сферической моделью проективной плоскости называется сфера произвольного радиуса с центром в отмеченной точке $\mathbb{E}^3$.



Каждая проективная точка проективной плоскости пересекает сферическую карту в двух диаметрально противоположных точках. Имея это в виду, говорят, что проективная плоскость есть сфера, диаметрально противоположные точки которой эквивалентны. Такое представление проективной плоскости вызывает непреодолимое желание склеить, так сказать, эти эквивалентные точки и посмотреть как выглядит проективная плоскость. Проведем мысленный эксперимент. Рассмотрим плоскость в пространстве $\mathbb{E}^3$, проходящую через отмеченную точку (проективную прямую). Эта плоскость пересечет сферическую карту по окружности. Назовем эту окружность экватором. Экватор делит сферу на две полусферы. Одну из них назовем северной полусферой, другую — южной. Каждая проективная точка изображается либо двумя точками экватора, либо точкой в южной полусфере. Считая, что южная полусфера изготовлена из тонкой резины (как воздушный шарик), растянем ее, сближая эквивалентные точки экватора до тех пор, пока они не совпадут. После того, как эквивалентные точки совпали, склеим их. На рисунке изображена последовательность указанных действий.



1. Сначала разрезали сферу плоскостью и удалили северную полусферу.

2. Сблизили эквивалентные точки.

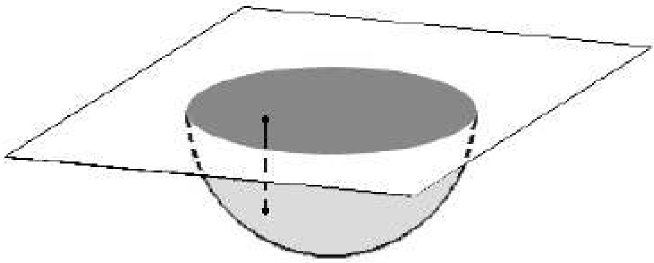
3. Склеили эквивалентные точки.

Таким образом, оказывается, что проективная плоскость есть самопересекающаяся поверхность («скрещенный колпак») в трехмерном пространстве $\mathbb{E}^3$. Известно, что вложить проективную плоскость в трехмерное пространство без самопересечений нельзя, однако этим уже занимается дифференциальная топология.

Замечание. Несмотря на невозможность вложить проективную плоскость в трехмерное пространство, она является такой же «равноправной» двумерной поверхностью, как, скажем, сфера или тор. Геометрические объекты существуют независимо от возможности вложить их куда-либо, и независимо от этой возможности их необходимо изучать. Именно в этом состоит главная мотивировка введения и изучения абстрактных многообразий.

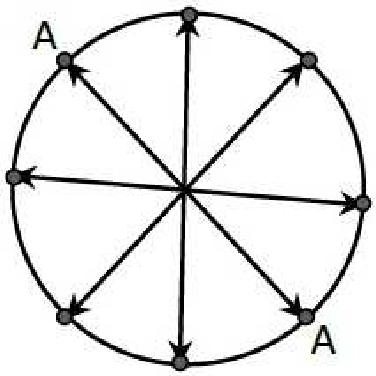
3. Модель проективной плоскости в виде круга

В этом пункте мы не будем склеивать точки экватора южной полусферы, как в предыдущем пункте. Вместо этого рассмотрим ортогональную проекцию южной полусферы на плоскость экватора. Точки южной полусферы при этой проекции попадут внутрь круга, границей которого является экватор.



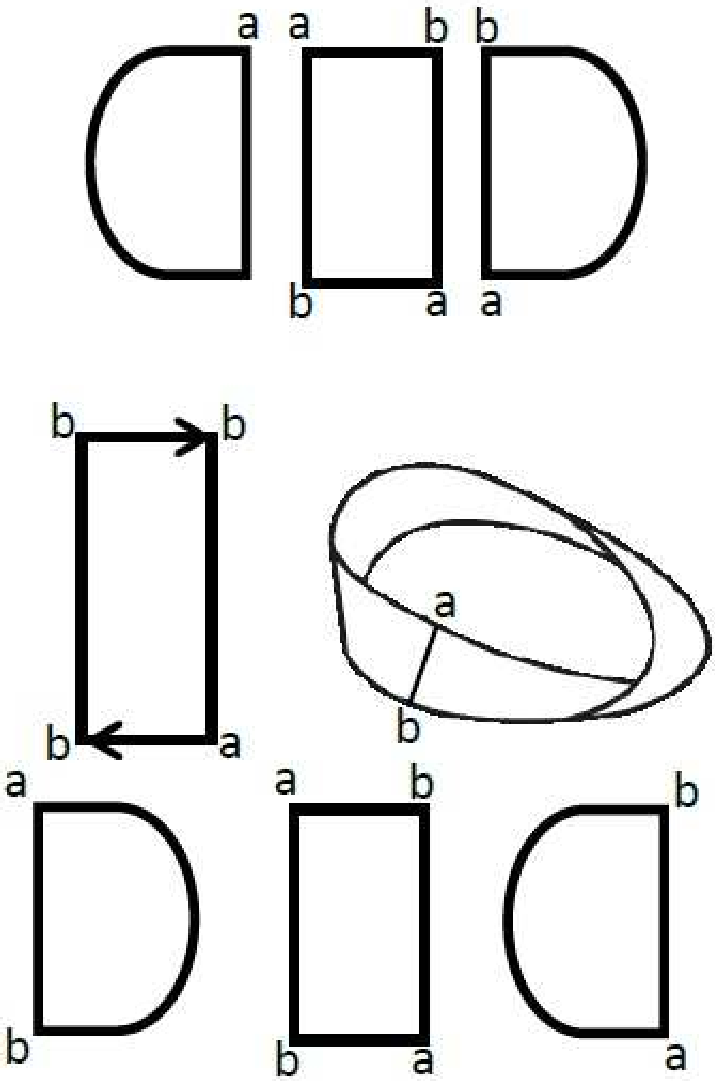
В результате мы получим представление проективной плоскости в виде круга, причем диаметрально противоположные точки границы этого круга эквивалентны.

Рассмотрим теперь две точки a и b на границе круга. Разрежем круг по двум хордам, соединяющим эти точки. Круг распадется на три части: два сегмента и среднюю часть, которая, как нетрудно сообразить, является лентой Мебиуса.



Деформируем оба сегмента, превратив хорды в дуги, а дуги в хорды. Склеим эквивалентные точки сегментов, которые после деформации оказались на хордах. Получим новый круг, точки границы которого есть точки разреза. Теперь исходный круг (модель проективной плоскости) разбит на две части: ленту Мебиуса и круг, причем точки границ ленты Мебиуса и круга эквивалентны. Таким образом, проективная плоскость есть лента Мебиуса, к границе которой приклеен круг.

Поскольку лента Мебиуса является односторонней поверхностью, следовательно, и проективная плоскость имеет только одну сторону. Удивительное дело: как и сфера проективная плоскость не имеет границы, но в отличие от сферы является односторонней поверхностью. В курсе дифференциальной геометрии то, о чем мы сейчас говорим, формализуется термином ориентация. Итак, проективная плоскость



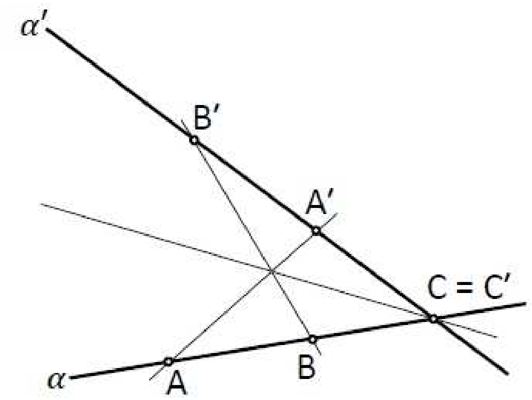
доставляет пример неориентируемой замкнутой поверхности.

Замечание. В связи с рассмотрением проективной плоскости возникает следующий естественный вопрос: а какие вообще бывают замкнутые двумерные поверхности? Какова их классификация? Подобные задачи являются одними из ключевых в математике. Изучая те или иные объекты, например, многообразия, функции, дифференциальные уравнения вы, грубо говоря, приходите к необходимости определить, какие объекты вы считаете различными, а какие не отличаете. Что значит «не отличате» или, иными словами, «считаете равными»? Два объекта называются равными, если существует соответствующее преобразование (аналог движения евклидовой геометрии), которое переводит один объект в другой. Какие преобразования естественным образом переводят одну поверхность в другую? Со временем мы ответим на этот вопрос и вернемся к классификации замкнутых двумерных поверхностей.

4. Отрезок и луч в проективной геометрии

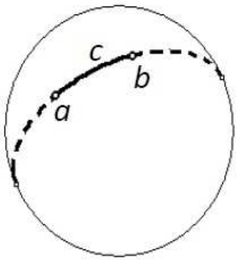
Оказавшись на проективной плоскости надо хорошенько запомнить одно правило: здесь привычные наглядные образы евклидовой геометрии не работают. Вот один из самых ярких примеров. В евклидовой геометрии из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими. В проективной геометрии дело обстоит не так. Проективная прямая замкнута. Поэтому нельзя сказать, что одна из трех точек прямой лежит между двумя другими.

Замечание. С топологической точки зрения проективная прямая является не чем иным, как окружностью.

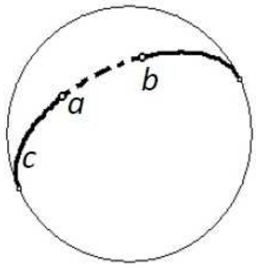


Рассмотрим три проективные точки a, b, c на проективной прямой и две аффинные карты α и α'. Обозначим через A, B, C изображения прямых a, b, c на карте α, а через A', B', C' их же изображения на карте α'. На этом рисунке видно, что на карте α точка B лежит между точками A и C, а на карте α' точка A' лежит между точками B' и C'.

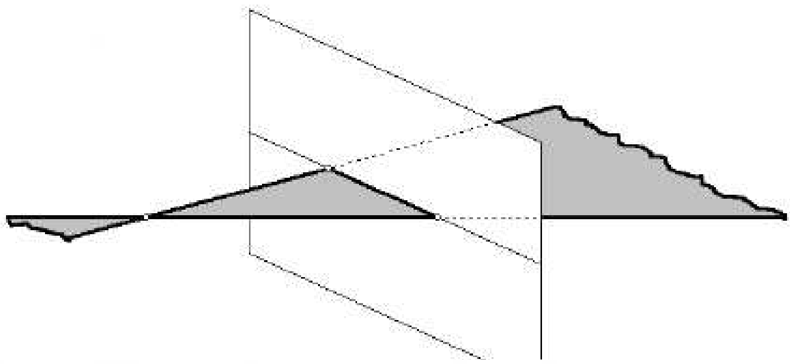
Для человека, воспитанного на евклидовой геометрии, естественно после этого спросить: а как обстоит дело с отрезком и лучом в проективной геометрии? Для ответа на эти вопросы удобно воспользоваться моделью проективной плоскости в виде круга. Тогда очевидно, что точка не разбивает проективную прямую на две части. Поэтому аналога евклидова луча в проективной геометрии нет, а, следовательно, нет и аналога евклидового угла. Нет смысла в проективной геометрии говорить и о «полуплоскостях», поскольку проективная прямая не делит проективную плоскость на две части.

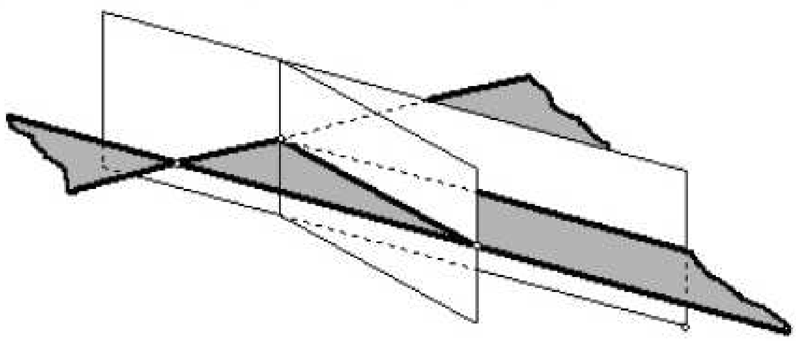


Две же точки разбивают проективную прямую на два куска, каждый из которых можно назвать проективным отрезком. Чтобы отличить один отрезок от другого, нужно указать еще одну его точку, поэтому в проективной геометрии отрезок обозначается тремя точками (acb на рисунках).



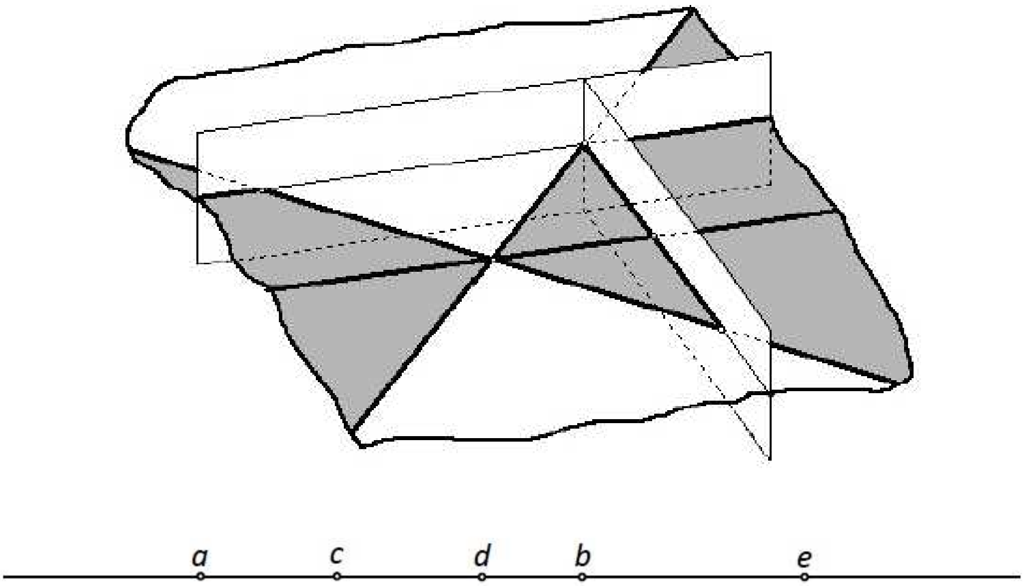
Заметим, что на одной аффинной карте проективный отрезок может изображаться аффинным отрезком, а на другой карте это же множество точек может изображаться лучом или даже двумя непересекающимися лучами, лежащими на одной прямой, с различными начальными точками. На рисунках ниже представлены все три случая.





Наоборот, можно показать, что если на карте β некоторое множество проективных точек изображается в виде луча или двух лучей, лежащих на одной прямой, то это множество есть отрезок. Для дальнейшего нам будет удобно следующее понятие.

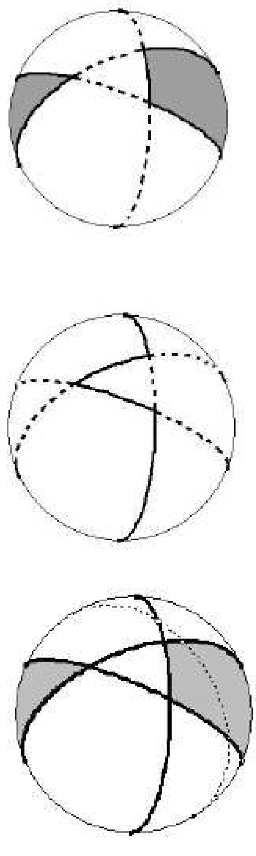
Определение. Пусть точка d принадлежит отрезку acb, а точка e



— не принадлежит. Тогда будем говорить, что пара точек c и d не разделяет пару точек a и b, а пара точек c и e — разделяет точки a и b.

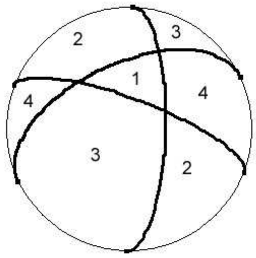
5. Треугольник в проективной геометрии

Здесь нас тоже ждут сюрпризы, но после предыдущего пункта это уже не должно казаться удивительным.



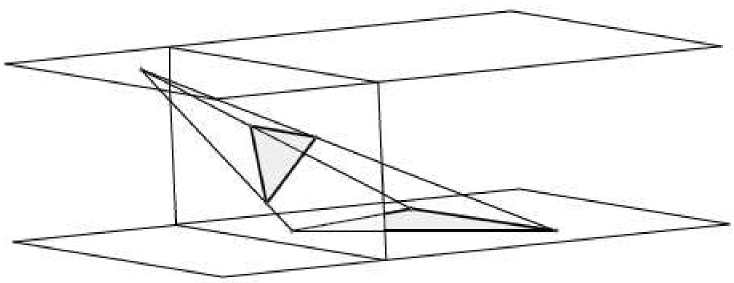
Рассмотрим три произвольные проективные точки, не лежащие на одной прямой и три проективные прямые, проходящие через эти точки. Выделим на каждой прямой по отрезку. Получим замкнутую ломаную из трех звеньев. Естественно, эту ломаную назвать «проективным треугольником». Заметим, что мы получили треугольники двух типов: треугольники первого типа разделяют проективную плоскость на две части, а треугольники второго типа не разделяют. Кроме того, можно показать что для треугольников второго типа существует проективная прямая, которая пересекает все три стороны треугольника, для треугольников же первого типа такой прямой не существует.

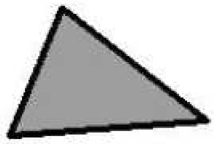
Заметим, что три проективные точки задают четыре проективных треугольника. Особенно хорошо эти четыре треугольника можно увидеть на сферической модели проективной плоскости.



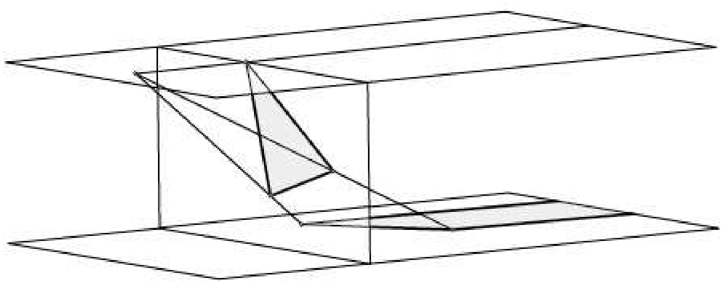
Посмотрим на то, как изображается проективный треугольник на аффинных картах. Пусть α — карта, на которой проективный треугольник изображается аффинным треугольником. Рассмотрим другую карту β.

Если бесконечноудаленная проективная прямая β_∞ и треугольник на карте α не пересекаются, то на карте β треугольник изображается тоже аффинным треугольником



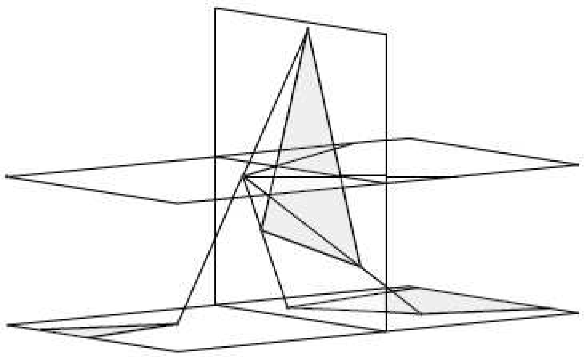


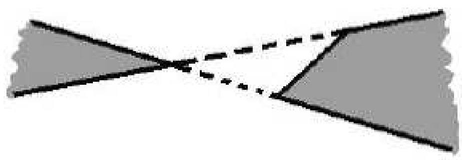
Если β_∞ пересекает треугольник на карте α в одной вершине, то изображение треугольника на карте β выглядит так, как на рисунке ниже.



И, наконец, если β_∞ пересекает треугольник на карте α по отрезку, не содержащему ни одной вершины этого треугольника, то изображение треугольника на карте β представлено ниже

Итак, мы рассказали о том, что такое проективная плоскость, проективные прямые, отрезки и треугольники. Что же осталось?





Существует ли в проективной геометрии аналог евклидовой окружности и евклидова движения? Найти аналог движения особенно важно, поскольку, согласно Эрлангенской программе Клейна, это необходимо для того, чтобы проективная геометрия имела право называться геометрией. Кроме того, совершенно непонятно как сказать, что такое проективное пространство. Ведь для того, чтобы определить проективную плоскость, мы использовали евклидово трехмерное пространство. Стало быть, следуя той же схеме, для определения проективного пространства нам понадобилось бы «евклидово пространство размерности четыре».

6. Уравнение прямой

Проективная прямая, или одномерное проективное пространство, есть множество прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через фиксированную точку, другими словами — плоский пучок прямых. Таким образом, если точки проективной плоскости — прямые, проходящие через ноль, то проективные прямые — плоскости, проходящие через ноль. На аффинной карте эти плоскости оставляют следы в виде прямых. Любые две плоскости, проходящие через ноль, пересекаются по прямой, или любые две проективные прямые пересекаются в одной проективной точке. Если две плоскости оставляют на карте параллельные следы, то прямая их пересечения также параллельна карте, или другими словами, точка их пересечения по отношению к данной карте является бесконечно удаленной.

Любые две прямые, проходящие через ноль, однозначно определяют плоскость, то есть, через любые две проективные точки проходит единственная проективная прямая. Пусть эти точки $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ имеют однородные координаты $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$ и $(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$, то есть задаются векторами $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ и $b = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Эти векторы образуют базис двумерного подпространства W. Любой другой вектор $x \in W$ представим в виде $x = \lambda a + \mu b$. Или в однородных координатах

$$\rho x_1 = \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1$$

$$\rho x_2 = \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2$$

$$\rho x_3 = \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3$$

Как известно из курса линейной алгебры, линейная зависимость векторов a, b, x может быть также записана в виде равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ x_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ x_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

Разложив этот определитель по первому столбцу, получим линейное уравнение

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

коэффициентами которого являются соответствующие миноры.

$$\rho u_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}; \quad \rho u_2 = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}; \quad \rho u_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, проективная прямая в однородных координатах задается линейным однородным уравнением. Если две прямые u и v задаются уравнениями

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$$

то однородные координаты точки их пересечения могут быть найдены как решения системы двух уравнений, то есть миноры:

$$\rho x_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_2 \\ v_3 & v_3 \end{vmatrix}; \quad \rho x_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3; \end{vmatrix}; \quad \rho x_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2; \end{vmatrix}.$$

Бросается в глаза симметрия формул, позволившая Юлиусу Плюккеру (1801–1868) назвать коэффициенты уравнения u_1, u_2, u_3 *однородными координатами прямой* u. В самом деле, координаты точки x_1, x_2, x_3 и координаты прямой u_1, u_2, u_3 входят в уравнение $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ совершенно равноправно. Мы привыкли считать, что u_1, u_2, u_3 — это константы, а переменные x_1, x_2, x_3, задающие точку на прямой, меняются от точки к точке. Можно, однако, поступить строго наоборот. Будем считать однородные координаты точки x_1, x_2, x_3 постоянными, а координаты прямой u_1, u_2, u_3 — переменными. Тогда уравнение $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ будет описывать множество прямых, проходящих через данную постоянную точку $\widehat{x}(x_1 : x_2 : x_3)$, то есть, пучок прямых. Точно так же, как две точки задают единственную прямую, так и две прямые u и v задают единственный пучок. Любая прямая w, принадлежащая пучку, будет линейной комбинацией прямых u и v, то есть, $w = \lambda u + \mu v$. Или в однородных координатах

$$\rho x_1 = \lambda u_1 + \mu v_1$$

$$\rho x_2 = \lambda u_2 + \mu v_2$$

$$\rho x_3 = \lambda u_3 + \mu v_3$$

Подведем итоги в таблице:

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$	$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$
При постоянных u_1, u_2, u_3 уравнение задает множество точек, лежащих на одной прямой. Точка $\widehat{x}$ лежит на прямой, заданной точками $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$	При постоянных x_1, x_2, x_3 уравнение задает множество прямых, проходящих через одну точку. Прямая w принадлежит пучку, заданному прямыми u и v
$x = \lambda a + \mu b$	$w = \lambda u + \mu v$
Точки $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}$ лежат на одной прямой, если $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$	Прямые u, v, w проходят через одну точку, если $\begin{vmatrix} u_1 & u_1 & u_1 \\ v_2 & v_2 & v_2 \\ w_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$
Координаты прямой u, проходящей через точки $\widehat{x}, \widehat{y}$: $\rho u_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ $\rho u_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ $\rho u_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$	Координаты точки $\widehat{x}$, в которой пересекаются прямые u, v: $\rho u_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ $\rho u_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ $\rho u_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$

Такая симметрия формул является проявлением *принципа двойственности.*

7. Проективная двойственность

В 1822 году в своем «Трактате о проективных свойствах фигур» Жан-Виктор Понселе, в частности, пишет: «из каждого проективного предложения относительно точек и прямых на плоскости может быть получено второе предложение путем замены слова «точка» словом «прямая» и наоборот». Это наблюдение он назвал принципом двойственности, причем вытекал этот принцип непосредственно из его списка аксиом проективной геометрии на плоскости (см., например, Н.В. Ефимов, «Высшая геометрия»). При нашем подходе принцип двойственности становится теоремой. Для того, чтобы ее сформулировать и доказать нам опять понадобится алгебраическое отступление. Кстати говоря, проективная геометрия является, как мы уже не раз убеждались, прекрасной иллюстрацией применения алгебраического языка. Кроме того, использование многих алгебраических понятий в проективной геометрии является их очень хорошей мотивировкой. Ну а теперь необходимые определения.

Определение. Линейной функцией f на векторном пространстве V называется отображение $f : V \to R$, обладающее свойствами: $f(x+y) = f(x) + f(y), f(\mu x) = \mu f(x)$.

Линейные функции можно естественным образом складывать и умножать на действительные числа, то есть они образуют векторное пространство, которое называется сопряженным с V пространством и обозначается через V^*.

Теорема. $dim V^* = dim V$.

Доказательство. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис трехмерного пространства V, и любой вектор выражается через векторы базиса $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Рассмотрим три координатные функции, которые ставят любому вектору в соответствие его координаты в данном базисе.

$$\varepsilon_1(x) = x_1, \quad \varepsilon_2(x) = x_2, \quad \varepsilon_3(x) = x_3$$

Очевидно, эти функции являются линейными и $\varepsilon_i(e_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$. Любая линейная функция f определяется своими значениями на векторах базиса, поскольку в силу линейности

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3),$$

следовательно, если

$$f(e_1) = \varphi_1, f(e_2) = \varphi_2, f(e_3) = \varphi_3,$$

то

$$f(x) = \varphi_1 \varepsilon_1(x) + \varphi_2 \varepsilon_2(x) + \varphi_3 \varepsilon_3(x)$$

или

$$f = \varphi_1 \varepsilon_1 + \varphi_2 \varepsilon_2 + \varphi_3 \varepsilon_3.$$

Таким образом, функции $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ образуют в пространстве V^* базис (который называют сопряженным с базисом e_1, e_2, e_3 пространства V). Итак, мы доказали, что размерности пространств V и V^* равны. □

Заметим, что сопряженность двух векторных пространств является взаимной, то есть, можно считать, что $V^{**} = V$. Точнее, любой вектор $x \in V$ можно рассматривать как линейную функцию над V^*. Отображение $x : V^* \to R$ задается естественным образом $x : f \mapsto f(x)$. Кроме того, любую линейную функцию над V^* можно задать именно таким образом с помощью подходящего вектора $x \in V$, положив $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, где x_1, x_2, x_3 есть коэффициенты разложения функции f по базису $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Определение. Подпространство $W^0 \subset V^*$, называется аннулятором подпространства $W \subset V$, если оно состоит из всех функций, которые обращаются в 0 на векторах из W:

$$W^0 = \{f \in V^* | f(x) = 0, \forall x \in W\}$$

Теорема. *Для подпространства размерности* 1 *размерность аннулятора равна* 2*, а для подпространства размерности* 2 *размерность аннулятора равна* 1.

Таким образом, если отождествить одномерные пространства с проективными точками, а двумерные — с проективными прямыми, то получается, что аннулятором точки в пространстве V является прямая в сопряженном пространстве и наоборот. Кстати говоря, теперь понятно, зачем нам понадобилось сопряженное пространство.

Доказательство. Любое одномерное подпространство U порождается одним вектором e_1, а любое двумерное W — двумя векторами e_1, e_2. Любую линейно независимую систему (из одного или двух векторов) можно дополнить до базиса e_1, e_2, e_3. В сопряженном пространстве V^* рассмотрим сопряженный базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Любая функция f из двумерного подпространства U^0, порожденного векторами $\varepsilon_2, \varepsilon_3$, имеет вид $f = \varphi_2\varepsilon_2 + \varphi_3\varepsilon_3$, то есть $f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \varphi_2x_2 + \varphi_3x_3$. А подпространство U, порожденное вектором e_1, состоит из всех векторов, для которых $x_2 = x_3 = 0$. Таким образом, для любого вектора $x \in U$ и любой функции $f \in U^0$ получаем $f(x) = 0$. Учитывая, что векторы из V являются линейными функциями на V^* и при этом $f(x) = x(f)$, можно сказать, что U является также аннулятором U^0, то есть $U^{00} = U$. Аналогично, аннулятором двумерного пространства $W \subset V$ будет одномерное подпространство $W^0 \subset V^*$, порожденное вектором ε_3 из сопряженного базиса. □

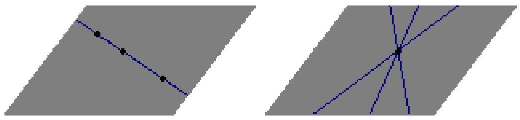
Можно рассмотреть теперь соответствие между подпространствами пространств V и V^* по естественному правилу

$$W \leftrightarrow W^0$$

При этом, разумеется, одномерным подпространствам из V (то есть проективным точкам) соответствуют двумерные подпространства из V^* (проективные прямые), а двумерным подпространствам из V — одномерные, и наоборот. Заметим, что соответствие $W \leftrightarrow W^0$ сохраняет вложенность подпространств, а именно, если $U \subset W$, то $U^0 \supset W^0$. В самом деле, вложение $U \subset W$ означает, что существует базис e_1, e_2, e_3 пространства V, в котором вектор e_1 порождает подпространство U, а векторы e_1, e_2 — подпространство W. В сопряженном базисе $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ пространства V^* аннулятор U^0 порождается векторами $\varepsilon_2, \varepsilon_3$, а аннулятор W^0 — вектором ε_3, то есть $U^0 \supset W^0$.

На языке проективной геометрии это и означает, что при отображении $W \leftrightarrow W^0$ точкам проективного пространства PV соответствуют (являются, так сказать, двойственными) прямые пространства PV^* и наоборот. Если при этом в пространстве PV точка $\widehat{x}$ лежит на прямой $\widehat{w}$, то в сопряженном пространстве PV^* прямая $\widehat{x}^0$ проходит через точку $\widehat{w}^0$. Таким образом, доказана

Теорема. *(принцип двойственности). Проективные точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда двойственные им проективные прямые пересекаются в одной точке.*



Итак, «из каждого проективного предложения относительно точек и прямых на плоскости может быть получено второе предложение путем замены слова «точка» словом «прямая» и наоборот».

Заметим, что в проективной геометрии удобно вместо оборотов *«точка лежит на прямой»* и *«прямая проходит через точку»* говорить, что *«точка и прямая инцидентны»*. Тогда последняя теорема будет звучать так:

Теорема. *(принцип двойственности). Проективные точки инцидентны одной прямой тогда и только тогда, когда двойственные им проективные прямые инцидентны одной точке.*

Вспомним теперь, что как точки, так и прямые задаются тремя однородными координатами, и точка $\widehat{x}(x_1 : x_2 : x_3)$ лежит на прямой $u(u_1 : u_2 : u_3)$, если

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Координаты прямой получают очень удобное истолкование в сопряженном пространстве. В самом деле, в сопряженном пространстве любой вектор $u \in V^*$ с координатами $u(u_1, u_2, u_3)$ задает проективную точку $u \in PV^*$ с однородными координатами $u(u_1 : u_2 : u_3)$.

С другой стороны, элементы пространства V^* являются линейными функциями на пространстве V, причем для $x \in V$

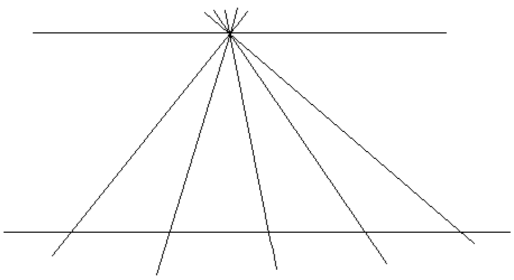
$$u(x) = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3.$$

Множество точек $x \in V$, для которых $u(x) = 0$, образуют двумерное подпространство W^0, аннулятор подпространства из V^*, порожденного вектором u. Это и есть множество точек, принадлежащих прямой u (раньше говорили *«прямолинейный ряд точек»*). Саму прямую можно представлять как проективную точку в пространстве PV^*.

Точно так же любой вектор $x \in V$ является линейной функцией на V^*, причем для $u \in V^*$

$$x(u) = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3.$$

Множество точек $u \in V^*$, для которых $x(u) = 0$, образуют аннулятор, то есть двумерное подпространство в V^*, или пучок прямых, проходящих через точку $\widehat{x}$.



Таким образом координаты прямой — это координаты точек в сопряженном проективном пространстве PV^*.

После всего сказанного, понятно, что в проективной геометрии имеет смысл рассматривать пары — прямая и пучок прямых, поскольку в силу принципа двойственности, проективная прямая — это и есть пучок! Соответствующий чертеж, изображающий взаимно однозначное соответствие между точками проективной прямой и прямыми пучка можно истолковать как линейное отображение двух сопряженных одномерных проективных пространств.

8. Проективные преобразования

В Эрлангенской программе Феликса Клейна был провозглашен очень важный принцип: геометрия изучает свойства фигур, остающиеся неизменными под действием некоторой группы преобразований.

Скажем в евклидовой геометрии изучаются свойства фигур, не меняющиеся при поворотах, переносах и осевых симметриях (движениях). Если допустить к рассмотрению еще и гомотетии, получим геометрию подобий. Наконец аффинная геометрия рассматривает любые линейные преобразования обычной плоскости. При этом, скажем, остается очень важное понятие параллельности прямых. В проективной геометрии нет и параллельности. Однако есть еще отношение инцидентности точек и прямых.

Можно так вольно изложить идею Эрлангенской программы: в каждой новой геометрии «ищи аналог» евклидова движения. В проективной геометрии таким аналогом являются проективные преобразования. С точки зрения геометрии проективные преобразования должны прямые переводить в прямые и сохранять инцидентность. Поскольку проективная плоскость получена проективизацией векторного пространства V, естественно рассмотреть такие преобразования этого векторного пространства, которые прямые переводят в прямые.

Определение. *Линейным оператором* $\mathcal{A}$ называется функция из векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2, которая удовлетворяет двум условиям:

1. $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$,
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\mathcal{A}(x)$.

Как известно из курса линейной алгебры, в координатах линейный оператор задается матрицей A, и действует на вектор x, как умножение матрицы на вектор

$$\mathcal{A}(x) = Ax$$

Линейный оператор, вообще говоря, не является преобразованием, то есть различные векторы могут иметь один и тот же образ. В дальнейшем нас будут интересовать операторы с невырожденной матрицей $detA \neq 0$, которые задают взаимно однозначные линейные преобразования. Поскольку прямая, проходящая через 0 (проективная точка), переходит при этом в прямую, проходящую через 0 (тоже проективную точку), линейный оператор $\mathcal{A}$ порождает на проективной плоскости преобразование $\widehat{\mathcal{A}}$.

Определение. Пусть $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ — линейное преобразование векторных пространств V_1 и V_2. *Проективным преобразованием* проективных пространств PV_1 и PV_2 называется отображение $\widehat{\mathcal{A}}$, задаваемое формулой

$$\widehat{\mathcal{A}}(\widehat{x}) = (\widehat{\mathcal{A}(x)})$$

Напомним, что через $\widehat{x}$ мы обозначаем проективную точку (то есть прямую, проходящую через ноль), порожденную вектором x. Таким образом, проективное преобразование есть действие линейного преобразования $\mathcal{A}$ на прямую, проходящую через точку x. Значением преобразования $\widehat{\mathcal{A}}$ является прямая, проходящая через точку $\mathcal{A}(x)$.

Проективное преобразование означает, по существу, преобразование самого общего вида, то есть преобразование, сохраняющее «линейность» (точка преобразуется в точку, прямая — в прямую, плоскость — в плоскость).

Впервые проективное преобразование появилось в «Историческом обзоре происхождения и развития геометрических методов», изданном в 1837 году. Автором обзора был французский математик Мишель Шаль. Правда, Шаль называл проективное преобразование гомографией (от греческих слов «гомос» - подобный и «графо» - пишу, рисую). Впрочем, этот термин используется и сейчас.

Заметим кстати, что такое естественное линейное преобразование как гомотетия $H(x) = \lambda x$ порождает тождественное проективное преобразование, поскольку все прямые, (они же проективные точки) переходят сами в себя.

Теорема. *(Штаудт) Если проективное преобразование проективной прямой в себя имеет три неподвижные точки, то оно тождественно.*

Доказательство. Как нам уже известно, три точки на прямой — это проективный репер E_0, E_1, E_2, который определяет базис e_1, e_2 с точностью до гомотетии. Это и означает, что базис e_1, e_2 переходит в базис $\lambda e_1, \lambda e_2$, а все проективные точки при этом остаются на месте. $\square$

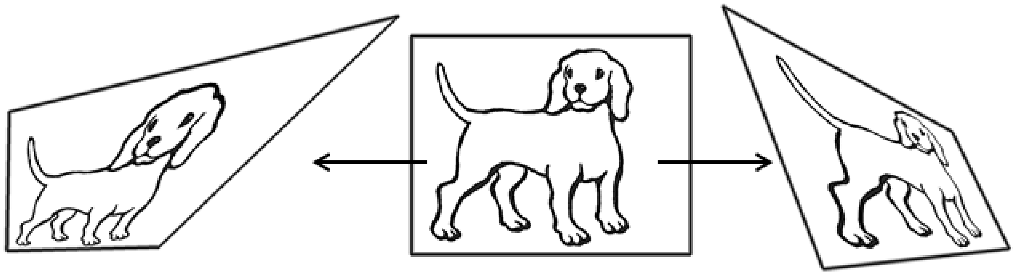
Из доказанной теоремы следует, в частности, что любое проективное преобразование прямой определяется тремя точками, причем их образы можно задать произвольно. Скажем, проективное преобразование $\widehat{\mathcal{A}}$ проективной прямой может две точки $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ оставлять на месте, а точку $\widehat{c}$ переводить в точку $\widehat{d}$.

Двойственная конструкция — отображение пучка на себя. Точно так же в пучке можно выбрать репер из трех прямых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_0$ и его образ $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_0'$, определяя проективное отображение пучка на себя. Заметим, что при этом мы рассматриваем прямую, как целый, неделимый объект. «Судьба каждой точки» нас принципиально не интересует. При этом оказывается верной двойственная теорема: *проективное отображение пучка на себя, имеющее три неподвижные прямые, является тождественным.*

Теперь вполне естественно доказать теорему, которую часто называют первой основной теоремой проективной геометрии. Однако, надо заметить, что в нашем изложении эта теорема теряет свой статус и уже не играет той роли, которую она играла в XIX веке в проективной геометрии, когда при помощи проективных построений пытались получить все точки проективной прямой, начав с трех данных.

Теорема. *(Первая основная теорема проективной геометрии) Проективное преобразование плоскости вполне определяется четырьмя точками общего положения, причем их образами могут служить любые четыре точки общего положения.*

Доказательство. Пусть e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2, f_3– базисы реперов E_0, E_1, E_2, E_3 и F_0, F_1, F_2, F_3. Линейное преобразование $\mathcal{A}$, переводящее один базис в другой, порождает искомое проективное преобразование $\widehat{\mathcal{A}}$. Если $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{A}}'$- два таких проективных преобразования, то проективное преобразование $\widehat{\mathcal{A}^{-1}} \circ \widehat{\mathcal{A}}'$ оставляет все точки репера E_0, E_1, E_2, E_3 на месте и, следовательно, в силу леммы есть просто умножение на число λ. Что и требовалось доказать. □



На рисунке вы видите, как действуют проективные преобразования, переводящие прямоугольник в произвольный четырехугольник.

Напишем уравнения проективного преобразования в неоднородных координатах. В пространстве линейное преобразование задается уравнением $x' = Ax$, или подробно

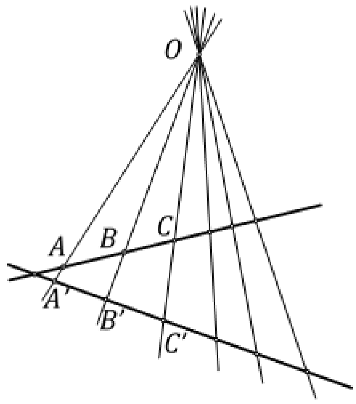
$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

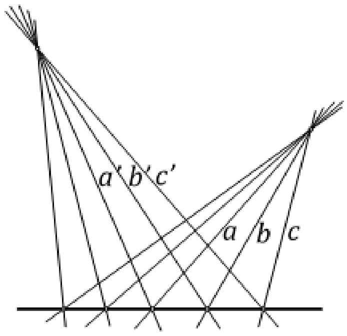
Переходя к неоднородным координатам на аффинной карте $x_3 = 1$ по формулам $(x_1 : x_2 : x_3) \to \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$, получаем формулы преобразования координат на карте

$$\begin{cases} x_1' = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}} \\ x_2' = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}} \end{cases}$$

Значит, дробно-линейное преобразование координат обычной плоскости задает на ней проективное преобразование, а в знаменателе стоит как раз уравнение прямой, «уходящей на бесконечность».

9. Центральная проекция



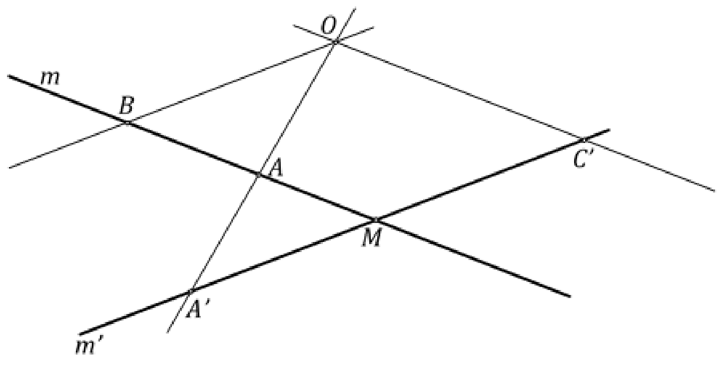


Можно задать и проективное отображение одной прямой на другую. Пожалуй, самый простой способ заключается в том, чтобы пересечь один пучок двумя прямыми и поставить в соответствие друг другу точки пересечения обеих прямых с одной и той же прямой пучка. Такое отображение одной прямой на другую называется перспективой или центральной проекцией. Можно сказать, с него начиналась вся проективная геометрия.

В самом деле, можно считать, что две прямые — это два одномерных проективных пространства P_1^1, P_2^1 , а проецирующий пучок тоже двойственное одномерное пространство P^*. Тогда центральная проекция будет композицией двух взаимно-однозначных линейных отображений $f_1 : P_1^1 \to P^*$ и $f_2 : P^* \to P_2^1$. Сначала первая прямая отображается на пучок, затем пучок — на вторую прямую.

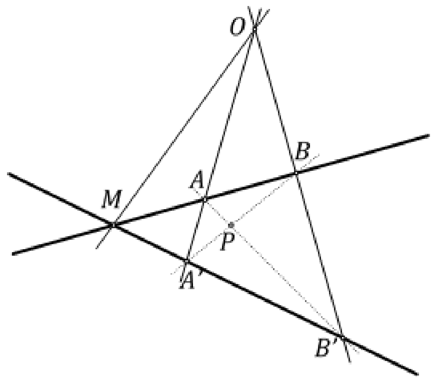
Двойственная конструкция — перспективное отображение одного пучка на другой. Пересечем два пучка одной прямой (осью перспективы) и поставим друг другу в соответствие те прямые из двух пучков, которые пересекаются в точке, лежащей на оси. Изучим подробнее свойства этих отображений.

Теперь можно все же считать, что обе прямые и проецирующий пучок погружены в одну проективную плоскость. Возникает естественное желание продолжить отображение двух прямых до проективного преобразования всей плоскости.

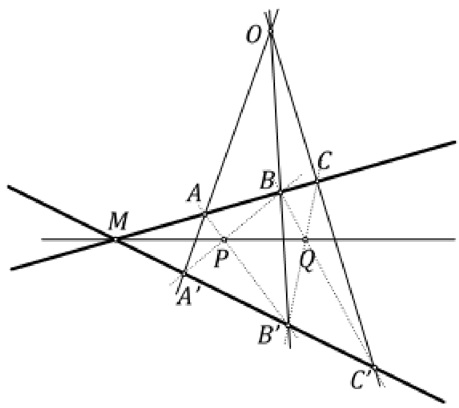


Для этого рассмотрим не только отображение прямой m на m', но и одновременно обратное отображение прямой m' на m. Будем считать, что при центральной проекции точка A переходит в точку A', и наоборот, точка A' — в точку A.

Для продолжения этого соответствия до отображения всей проективной плоскости на себя возьмем на прямых две пары соответственных точек A и A', B и B'. Вместе с точкой M пересечения прямых и центром проекции O получается 6 точек. Рассмотрим проективное отображение f плоскости на себя, которое репер $OMAB'$ переводит в репер $OMA'B$. Исследуем свойства этого отображения.



1) Пучок с центром O переходит сам в себя, при этом три прямые пучка OM, OA, OB переходят сами в себя. Это означает, что все(!) прямые пучка остаются на месте. Поскольку прямая AB переходит в прямую $A'B'$ и наоборот, точки пересечения любой прямой пучка с прямыми AB и $A'B'$ переходят друг в друга. Значит, на прямые AB и $A'B'$ отображение f действует как перспектива с центром O.



2) Отображение f меняет местами точки A и A', B и B', следовательно прямая AB' переходит в прямую $A'B$ и наоборот, следовательно точка пересечения прямых AB' и $A'B$ переходит сама в себя, то есть остается неподвижной.

Это же верно для любых двух пар соответственных точек, лежащих на прямых AB и $A'B'$. Если точки X и X' меняются местами, также как и точки Y и Y', то точка пересечения прямых XY' и $X'Y$ является неподвижной точкой отображения f.

3) У отображения f, очевидно, имеется много неподвижных точек,

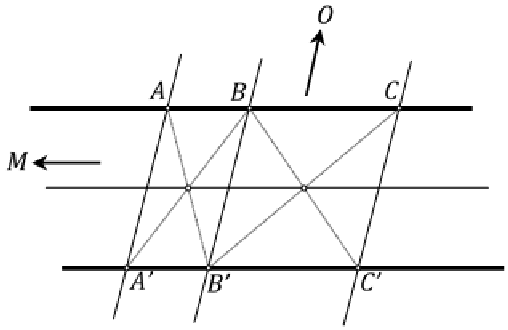
но поскольку отображение, переводящее четыре точки общего положения в себя, является тождественным, то эти неподвижные точки должны лежать на одной прямой. Выберем любые две из них — P и Q. У отображения f уже имеются две неподвижные точки O и M. Точки P и Q должны лежать на одной прямой либо с точкой O, либо с точкой M. Если неподвижные точки O, P, Q лежат на одной прямой, то все точки этой прямой должны быть неподвижны, что невозможно. Следовательно, неподвижные точки P и Q лежат на одной прямой с точкой M, а значит, все неподвижные точки, за исключением точки O, лежат на одной прямой, проходящей через точку M. Эта прямая называется осью отображения f. Таким образом, доказана

Теорема. *Если при центральной проекции одной прямой на другую точки A и B переходят в точки A' и B', то точка пересечения прямых AB' и $A'B$ лежит на фиксированной прямой (оси перспективы).*

Заметим, что доказанную теорему можно применить для решения известной задачи: На листе бумаги начерчены отрезки AB и $A'B'$, причем точка пересечения прямых AB и $A'B'$ лежит за пределами листа. Выполняя построения одной линейкой и не выходя за пределы листа, провести прямую через данную точку P и недоступную точку M пересечения прямых AB и $A'B'$. (решение задачи изображено на чертеже)

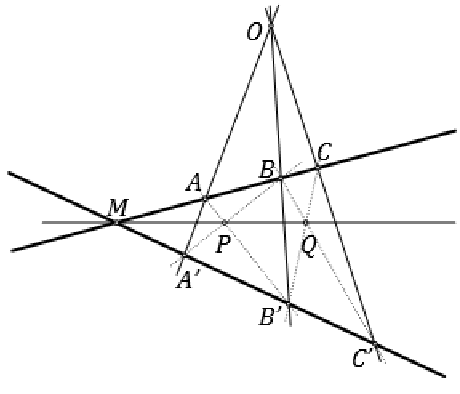
Интересно, что с одной стороны, доказать эту теорему средствами обычной евклидовой (школьной) геометрии не так просто, но с другой стороны, можно всего лишь выбрать подходящую аффинную карту и утверждение станет очевидным. Достаточно лишь увести точки O и M на бесконечность, чтобы пучки пересекающихся прямых изобразились на карте как пучки параллельных. В результате получаем «теорему»:

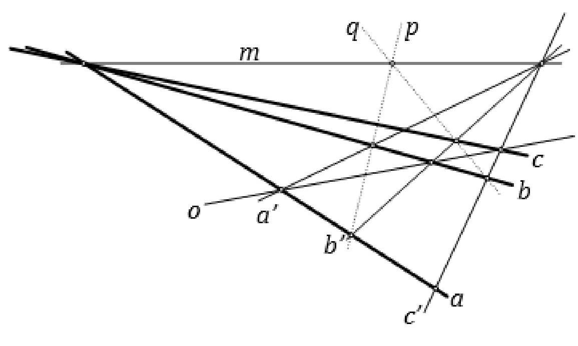
Теорема. *Если при параллельной проекции одной параллельной прямой на другую точки A и B переходят в точки A' и B', то точка* *пересечения прямых AB' и $A'B$ лежит на фиксированной прямой (оси симметрии).*



С точки зрения проективной геометрии две теоремы полностью эквивалентны. Однако, есть еще один источник новых теорем — принцип двойственности. Сформулируем двойственную теорему, заменив прямые на точки, а точки на прямые. Обозначения сохраним, взяв вместо прописных букв строчные.

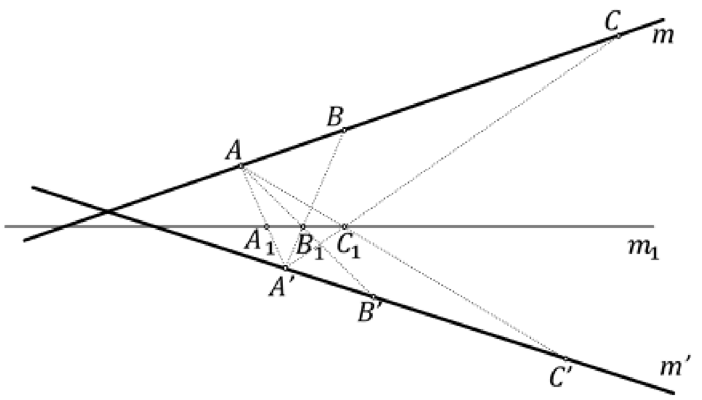
Теорема. *Если при центральной проекции одной прямой на другую точки A и B переходят в точки A' и B', то точка пересечения прямых AB' и $A'B$ лежит на фиксированной прямой (оси перспективы).*	**Теорема.** *Если при перспективном отображении одного пучка на другой прямые a и b переходят в прямые a' и b', то прямая, соединяющая точки пересечения прямых a, b' и a', b, проходит через фиксированную точку (центр перспективы).*





10. Теорема Паппа

Теперь рассмотрим произвольное проективное отображение одной прямой на другую. Для этого выберем на прямой m три произвольные точки A, B, C, образующие



репер, а на другой прямой m' также произвольный репер A', B', C' и построим отображение, переводящее один репер в другой. Воспользуемся единственным пока известным нам проективным отображением прямой на прямую — центральной проекцией.

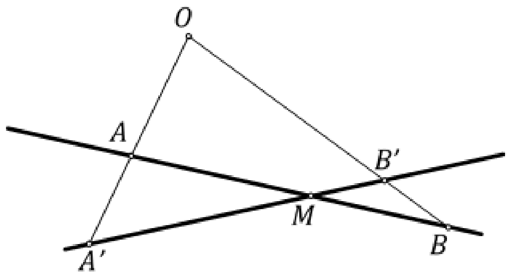
Построим точку пересечения прямых AB' и $A'B$, обозначив ее B_1, и точку пересечения прямых AC' и $A'C$, обозначив ее C_1. Проведем прямую m_1, соединив точки B_1 и C_1. Точку пересечения прямых m_1 и AA' обозначим A_1.

Рассмотрим центральную проекцию прямой m на m_1 с центром A'. Точки A, B, C перейдут в точки A_1, B_1, C_1. Теперь при проекции прямой m_1 на m' с центром A точки A_1, B_1, C_1 перейдут в точки A', B', C'. Таким образом, при композиции двух указанных проекций репер A, B, C перейдет в репер A', B', C'. Центральные проекции являются проективными отображениями, следовательно доказана:

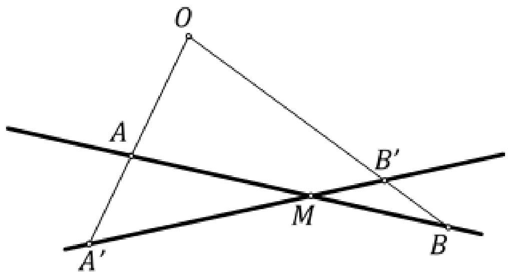
Теорема. *Любое проективное отображение одной прямой на другую либо является центральной проекцией, либо представимо в виде композиции двух центральных проекций.*

Следующая лемма позволяет отличать центральную проекцию от произвольного проективного отображения прямой на прямую.

Лемма. *Проективное отображение одной прямой на другую является центральной проекцией тогда и только тогда, когда точка пересечения прямых переходит сама в себя.*



Доказательство. Пусть точка пересечения M переходит в себя при проективном отображении одной прямой на другую. Выберем на одной прямой точки A и B , а на второй прямой — их образы A' и B'. Существует единственное проективное отображение, которое переводит репер A, B, M в репер A', B', M. Пусть прямые AA' и BB' пересекаются в точке O, тогда центральная проекция с центром O как раз и переводит репер A,B,M в репер A',B',M, и значит, совпадает с исходным отображением. □



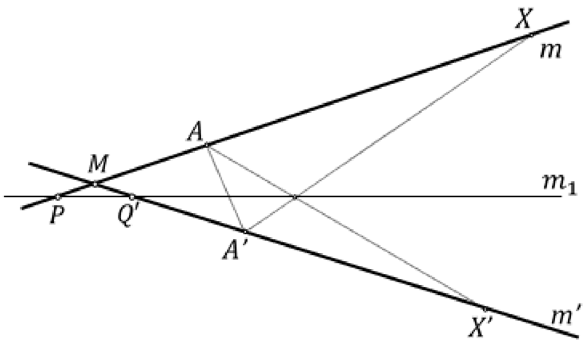
Очень полезна бывает двойственная лемма, где вместо прямых фигурируют пучки, а роль общей точки двух прямых играет общая прямая двух пучков.

Лемма. *Проективное отображение одного пучка на другой является перспективным тогда и только тогда, когда общая прямая двух пучков переходит сама в себя.*

Доказательство двойственной леммы «...может быть получено ... путем замены слова «точка» словом «прямая» и наоборот» (Понселе).

Докажем теперь одну классическую теорему проективной геометрии. Мы уже знаем, что для центральной проекции существует ось перспективы, состоящая из точек пересечения прямых AB' и $A'B$, где A, A' и B, B' — пары соответственных точек. На самом деле, такая ось существует для произвольного отображения прямой на прямую, в чем мы сейчас убедимся.

Теорема. *Если при проективном отображении одной прямой на другую точки A и B переходят в точки A' и B', то точка пересечения прямых AB' и $A'B$ лежит на фиксированной прямой (оси отображения).*



Доказательство. Представим проективное отображение f прямой m на прямую m' в виде композиции $f = p_2 \circ p_1$ двух центральных проекций p_1 и p_2 с центрами A' и A. Из построения следует, что если фиксировать две соответственные точки A и A', то для любой другой пары соответственных точек X и X' прямые AX' и $A'X$ пересекаются на фиксированной прямой m_1, которую можно временно назвать «осью, порожденной парой точек A и A'». Покажем теперь, что любая пара соответственных точек порождает одну и ту же ось. Пусть ось m_1 порождается точками A и A'. Рассмотрим точки P и Q', в которых эта ось пересекает прямые m и m' и точку M, в которой пересекаются прямые m и m'.

$$\rho_1(P) = P, \ \ \rho_2(P) = M \Rightarrow f(P) = \rho_2 \circ \rho_1(P) = M.$$

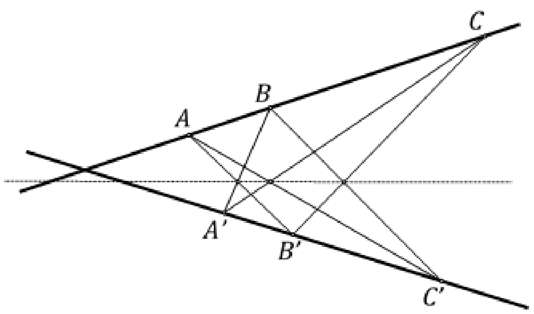
$$\rho_1(M) = Q', \ \ \rho_2(Q') = Q' \Rightarrow f(M) = \rho_2 \circ \rho_1(M) = Q'.$$

Другими словами, при рассматриваемом отображении точка M является образом точки P, и прообразом точки Q'.

Поскольку ось m_1, порожденная точками A и A', проходит через точки P и Q', которые являются образом и прообразом точки M, зависят только от свойств отображения и никак не связаны с выбором пары точек A и A', этим же свойством должна обладать и любая другая ось, порожденная парой соответственных точек. Это и означает, что у отображения есть лишь одна ось. $\square$

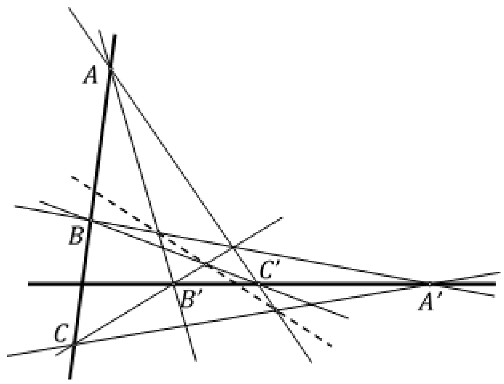
Следствием доказанной теоремы про ось отображения является одна из старейших теорем проективной геометрии. Ее формулировка и доказательство содержатся в «Математическом собрании» Паппа Александрийского (начало IV века н. э.). Безусловно, Папп пользовался лишь теоремами классической евклидовой геометрии. Удивительно даже не то, что он смог доказать ее такими неудобными средствами (попробуйте!), а то что он вообще смог ее сформулировать. Вот она:

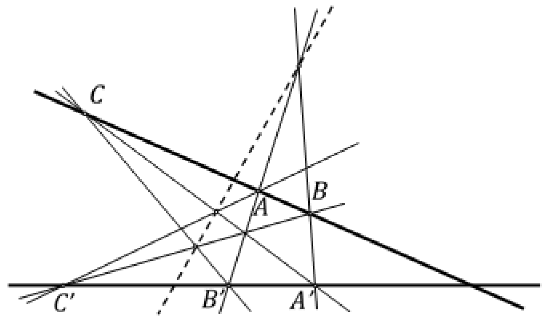
Теорема. *(Папп). Пусть тройки точек* A, B, C *и* A', B', C' *лежат на прямых* m *и* m' *соответственно. Тогда точки пересечения прямых* AB' *и* $A'B$, BC' *и* $B'C$, CA' *и* $C'A$ *также лежат на одной прямой.*



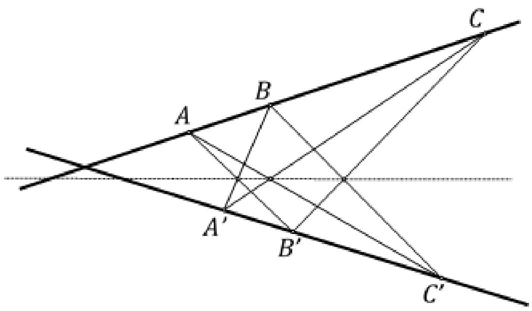
Доказательство. Рассмотрим проективное отображение, переводящее прямую m в прямую m', а репер A, B, C — в репер A', B', C'. В соответствии с предыдущей теоремой точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ должны лежать на оси этого отображения. □

Почему так удивляет теорема Паппа? Обычные теоремы евклидовой геометрии, которую изучают (проходят) в средней школе, имеют дело с углами, расстояниями, отношениями. А здесь перед нами теорема, которая говорит лишь о *коллинеарности* точек (точки инцидентны одной прямой) и *конкурентности* прямых (прямые инцидентны одной точке). Исходные тройки точек можно располагать на прямых в любом порядке, получая разнообразные, непохожие друг на друга чертежи, но точки пересечений обязательно будут лежать на одной прямой.





Всего в рассмотренную конфигурацию входят девять точек и девять прямых. На каждой прямой лежат по три точки, через каждую точку проходят три прямые. Попытка воспользоваться принципом двойственности и обменять местами точки и прямые приведет лишь к тому, что мы получим эквивалентную формулировку той же самой теоремы.



Теорема. *(Папп). Пусть тройки прямых a, b, c и a', b', c' проходят через точки M и M' соответственно. Тогда прямые, соединяющие точки пересечения a, b' и a', b, b, c' и b', c, c, a' и c', a, также проходят через одну точку.*

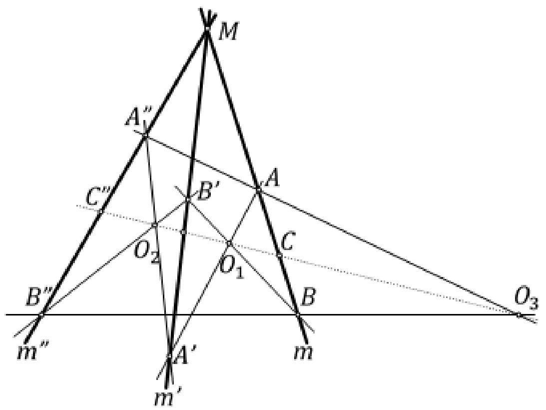
Построив чертеж к двойственной теореме, увидим ту же самую конфигурацию из девяти прямых и девяти точек. Для полноты картины осталось заметить, что теорема, двойственная теореме Паппа (и совпадающая с ней!) может быть выведена из теоремы о центре отображения двух пучков, которая является двойственной к теореме про ось отображения прямой на прямую.

Теорема. *Если при проективном отображении одного пучка на другой прямые a и b переходят в прямые a' и b', то прямая, соединяющая точки пересечения a, b' и a', b проходит через фиксированную точку (центр отображения).*

11. Теорема Дезарга

Теорема Дезарга, как и теорема Паппа устанавливает существование правильной конфигурации из точек и прямых. Если конфигурация Паппа состоит из девяти прямых и девяти точек, то конфигурация Дезарга — из десяти прямых и десяти точек. И в обеих конфигурациях через каждую точку проходят три прямые и на каждой прямой лежат по три точки.

Тем не менее, эти теоремы разделяет полторы тысячи лет. Последний великий геометр античности Папп Александрийский доказал свою теорему в IV веке, а Жерар Дезарг свою — в XVII веке. Дезарга интересовали практические вопросы построения изображений в перспективе. Его изыскания остались практически не замеченными современниками, и теорема Дезарга заняла свое место в проективной геометрии только в конце XIX века. Мы докажем ее, пользуясь свойствами центральной проекции.



Возьмем три прямые m, m', m'', проходящие через точку M. Выберем две произвольные точки O_1, O_2 и рассмотрим две центральные проекции. Первая проекция с центром O_1 переводит прямую m в прямую m', вторая проекция с центром O_2 переводит прямую m' в прямую m''. Композиция этих двух проекций является проективным преобразованием, переводящим прямую m в прямую m'', при этом точка пересечения M остается на месте. По известной лемме такое преобразование должно быть центральной проекцией. Построим ее центр, точку O_3.

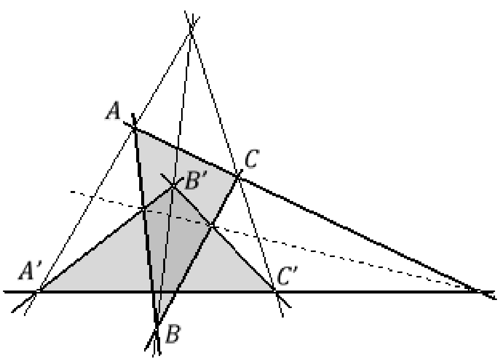
С одной стороны можно выбрать произвольную точку $A \in m$ и построить сначала ее образ $A' \in m'$ при первой проекции, затем образ полученной точки $A'' \in m''$ при второй проекции. Искомый центр композиции проекций, точка O_3, должна лежать на прямой

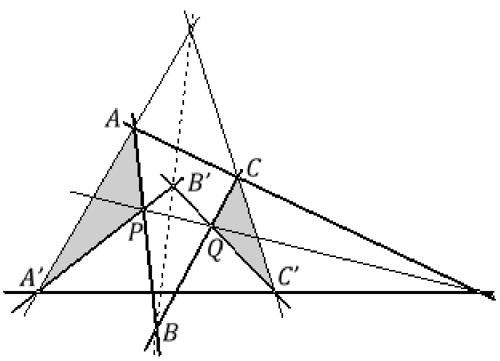
AA''. Взяв теперь любую другую точку $B \in m$ повторим построение, получая сначала точку $B' \in m'$, а затем точку $B'' \in m''$. Центр O_3 теперь находится как точка пересечения прямых AA'' и BB''.

Осталось заметить, что если рассмотреть точку C пересечения прямых O_1O_2 и m, то ее образ C'' будет точкой пересечения прямых O_1O_2 и m''. Третий центр проекции O_3 должен лежать на прямой CC'', или, другими словами, на прямой O_1O_2. Мы доказали, что при указанном построении три центра проекций лежат на одной прямой. Это и есть нужная нам теорема.

Теорема. *Пусть прямые m, m', m'' проходят через одну точку. Композицией центральной проекции m на m' и центральной проекции m' на m'' является центральная проекция m на m''. Центры трех проекций лежат на одной прямой.*

Однако, доказанную теорему не называют «теоремой Дезарга», хотя она ей эквивалентна. Чтобы сформулировать теорему Дезарга классическим образом, возьмем тот же самый чертеж и введем другие обозначения.



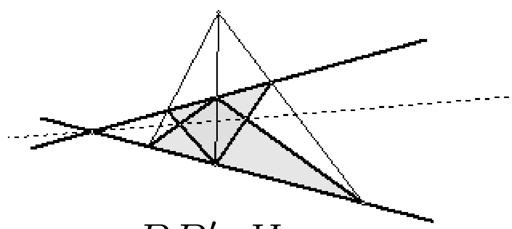


Теорема. ⇒ *(Дезарг). Пусть даны два трехвершинника ABC и $A'B'C'$. Если прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке (центр перспективы), то точки пересечения соответственных сторон AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ лежат на одной прямой (ось перспективы).*

Нетрудно убедиться, что на чертеже изображена конфигурация из десяти точек и десяти прямых. Через каждую точку проходят три прямые и на каждой прямой лежат по три точки. Двойственная конфигурация, очевидно, описывается точно таким же образом, и не дает новой теоремы. Однако, это обстоятельство позволяет изящно доказать обратную теорему.

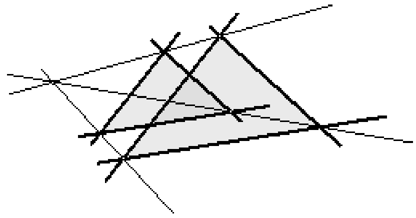
Теорема. $\Leftarrow$ *(Дезарг). Пусть даны два трехвершинника* ABC *и* $A'B'C'$. *Если точки пересечения соответственных сторон* AB *и* $A'B'$, BC *и* $B'C'$, CA *и* $C'A'$ *лежат на одной прямой, то прямые* AA', BB', CC' *пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке P, а прямые BC и $B'C'$ — в точке Q. Тогда трехвершинники $AA'P$ и $CC'Q$ расположены так, что прямые $AC, PQ, A'C'$ пересекаются в одной точке.



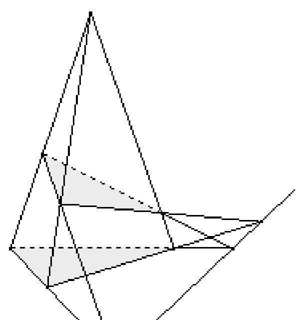
По прямой теореме Дезарга из этого следует, что точки пересечения их соответственных сторон лежат на одной прямой. Другими словами, точка пересечения прямых AA' и CC' лежит на прямой BB'. Именно это и требовалось доказать. □

Теперь можно заметить, что доказанная ранее теорема об оси центральной проекции есть лишь частный случай теоремы Дезарга.



Если увести одну из прямых на бесконечность, выбрав подходящую аффинную карту, получим из теоремы Дезарга почти очевидное утверждение из аффинной геометрии.

Если стороны двух треугольников попарно параллельны, то прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке.



Справедливости ради заметим, что доказать теорему Дезарга можно, и не используя аппарат проективной геометрии. Действительно, пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ не лежат в одной плоскости, тогда пары их соответственных сторон лежат в плоскостях граней трехгранного угла с вершиной O, и, следовательно пересекаются не только на плоском изображении, но и в пространстве. Эти точки пересечения лежат на одной прямой — линии пересечения плоскостей ABC и $A'B'C'$.

С другой стороны, Давид Гильберт в своей работе «Основания геометрии» показал, что невозможно доказать теорему Дезарга, не выходя из плоскости в пространство и не используя понятия расстояния между точками (метрики). Таким образом, если строить проективную геометрию аксиоматически, то теорему Дезарга (или теорему Паппа) придется включить в список аксиом.

Теоремы Дезарга и Паппа можно также доказать вычислениями в координатах (см. ПРИЛОЖЕНИЕ)

12. Двойное отношение

В евклидовой геометрии среди преобразований плоскости особую роль играют движения — преобразования, сохраняющие расстояния. Можно также рассмотреть преобразования подобия, которые сохраняют углы и отношения любых отрезков. Дальнейшее обобщение приводит к аффинным (линейным) преобразованиям плоскости, сохраняющим отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых. Если рассматривать аффинную плоскость как карту проективной плоскости, то аффинные преобразования становятся частным случаем проективных преобразований. Точнее, аффинное преобразование карты порождается проективным преобразованием, которое переводит бесконечно удаленную прямую в себя.

Как мы знаем, любые три различные точки проективной прямой проективным преобразованием можно перевести в любые другие три различные точки. Следовательно, проективное преобразование не сохраняет даже отношения расстояний между точками. Таким образом, о проективном преобразовании мы знаем пока лишь то, что прямую оно переводит в прямую. Найдем теперь числовой инвариант проективного преобразования.

Будем рассматривать отображение φ проективной прямой l на проективную прямую l' (или двойственное ему отображение пучка на пучок) как линейное отображение двух проективных одномерных пространств. Пусть преобразование $\varphi : l \to l'$ переводит точки A, B, X в точки A', B', X'. Тогда любая точка $Y \in l$, имеющая однородные координаты $(y_1 : y_2)$ в репере A, B, X, перейдет в точку $Y' \in l'$ с теми же самыми однородными координатами в новом репере A', B', X'. Отношение $\frac{y_1}{y_2}$ и есть искомый инвариант проективного преобразования φ. Его называют двойным отношением четырех точек A, B, X, Y и обозначают $(ABXY)$.

Определение. Двойным отношением четырех точек A, B, X, Y, лежащих на одной прямой, называется отношение $\frac{y_1}{y_2}$ однородных координат точки Y в репере A, B, X.

Такое определение удобно тем, что из него непосредственно следует сохранение двойного отношения при проективных преобразованиях. Однако с его помощью не так-то легко найти значение двойного отношения данных четырех точек. Выведем удобные формулы. Вместо проективной прямой рассмотрим двойственный образ: пучок прямых. Как обычно прямые пучка называем проективными точками $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}$, а соответствующие им векторы обозначаем a, b, x, y.

Пусть векторы a, b образуют базис, по которому разложены векторы x, y.

$$x = \lambda_1 a + \mu_1 b, \quad y = \lambda_2 a + \mu_2 b.$$

Возьмем теперь новый базис $a' = \lambda_1 a, b' = \mu_1 b$. В этом базисе $x = a' + b'$, и точки $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}$ образуют репер. При этом $a = \frac{1}{\lambda_1} a'$, $b = \frac{1}{\mu_1} b'$, следовательно

$$y = \lambda_2 a + \mu_2 b = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} a' + \frac{\mu_2}{\mu_1} b',$$

точка $\widehat{y}$ имеет в репере $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}$ однородные координаты $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)$,

Рассмотрим, наконец, самый общий случай, когда точки заданы своими однородными координатами в произвольном репере

$$\widehat{a}(a_1 : a_2), \quad \widehat{b}(b_1 : b_2), \quad \widehat{x}(x_1 : x_2), \quad \widehat{y}(y_1 : y_2),$$

Пусть при этом $x = \lambda_1 a + \mu_1 b, \;\; y = \lambda_2 a + \mu_2 b$, тогда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1}{\lambda_1 a_2 + \mu_1 b_2} = \frac{a_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} b_1}{a_2 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} b_2}, \qquad \frac{y_1}{y_2} = \frac{\lambda_2 a_1 + \mu_2 b_1}{\lambda_2 a_2 + \mu_2 b_2} = \frac{a_1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} b_1}{a_2 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} b_2}$$

Выразим отношения параметров

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{a_1 x_2 - a_2 x_1}{b_1 x_2 - b_2 x_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\mu_2}{\lambda_2} = \frac{a_1 y_2 - a_2 y_1}{b_1 y_2 - b_2 y_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}$$

Получаем

$$(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}$$

или

$$(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{\det(a, x)}{\det(b, x)} : \frac{\det(a, y)}{\det(b, y)}$$

Выведенную формулу часто берут за определение двойного отношения, после чего можно заметить, что оно не меняется при выборе различных векторов, соответствующих проективным точкам и инвариантно относительно линейных преобразований и выбора системы координат.

Итак, четыре точки $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}$ лежат на одной прямой

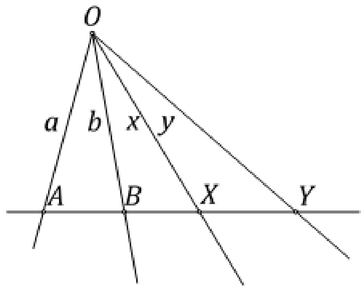
$$x = \lambda_1 a + \mu_1 b, \;\; y = \lambda_2 a + \mu_2 b$$

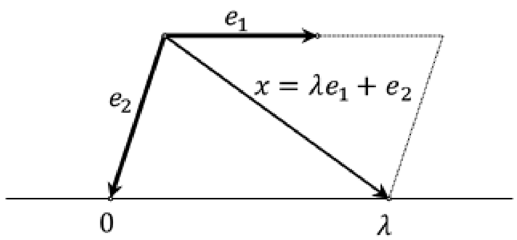
$$(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

Пусть теперь через эти точки проходят четыре прямые $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, принадлежащие одному пучку. Тогда, в пучке можно ввести согласованную с прямой параметризацию, когда вектор a задает и точку $\widehat{a}$ на прямой, и прямую $\mathbf{a}$ в пучке.

При этом $x = \lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b}$, $\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b}$ и мы получаем сложное отношение четырех прямых в пучке:

$$(\mathbf{abxy}) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$





Если точки $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}$ лежат на одной прямой, а прямые $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ принадлежат одному пучку и проходят через данные точки, то $(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}) = (\mathbf{abxy})$.

Выберем базис e_1, e_2 так, чтобы вектор e_1 был единичным вектором, параллельным прямой. Тогда любой точке прямой, кроме бесконечно удаленной, соответствует вектор

$$x = \lambda e_1 + e_2,$$

причем λ — обычная (неоднородная) координата точки на прямой. Однородные координаты точки $(\lambda : 1)$. Пусть точки A, B, X, Y имеют координаты

$$A(\alpha : 1),\ B(\beta : 1),\ X(\chi : 1),\ Y(\upsilon : 1).$$

По формуле с определителями получаем

$$(ABXY) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \chi & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta & 1 \\ \chi & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \upsilon & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta & 1 \\ \upsilon & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha - \chi}{\beta - \chi} : \frac{\alpha - \upsilon}{\beta - \upsilon}$$

или поскольку разность координат равна расстоянию между точками,

$$(ABXY) = \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} : \frac{\overline{AY}}{\overline{BY}}$$

Обозначения $\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}$ показывают, что отношения надо брать со знаком, зависящим от направления векторов. При этом двойное отношение оказывается отрицательным в том и только в том случае, когда пары точек AB и XY разделяют друг друга.

Конечно же можно определить двойное отношение на языке элементарной геометрии (см. ПРИЛОЖЕНИЕ)

13. Гармоническая четверка

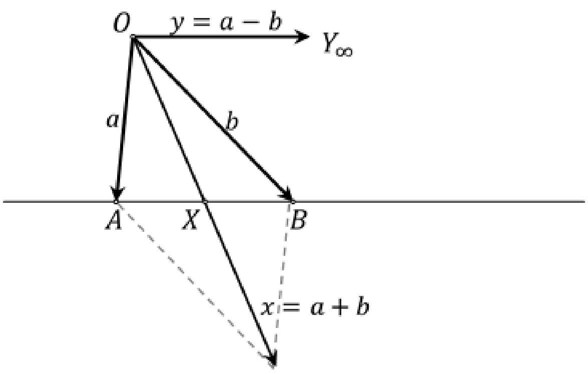
Очень важным является частный случай, когда сложное отношение четырех точек или прямых равно -1. Говорят, что такие точки или прямые образуют *гармоническую четверку* или *гармонически разделяют друг друга.* Важным он является, видимо, потому, что гармоническая четверка обобщает понятие середины отрезка из евклидовой или аффинной геометрии. Попробуем построить гармоническую четверку.

Возьмем на проективной прямой две точки $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$, и еще две точки $\widehat{x}$и $\widehat{y}$,

$$x = \lambda_1 a + \mu_1 b, y = \lambda_2 a + \mu_2 b,$$

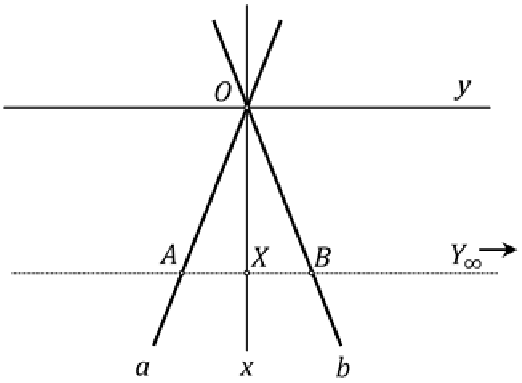
так, чтобы выполнялось равенство

$$(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = -1.$$



Для этого можно, например, взять значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = -1$, другими словами $x = a + b$, $y = a - b$. При выборе в качестве базисных векторов $\overline{OA}, \overline{OB}$ на аффинной карте получим две произвольные точки A, B, точку X — середину отрезка AB и бесконечно удаленную точку Y_∞, не поместившуюся на карте, $(ABXY_\infty) = -1$.

Лемма. *Середина отрезка и бесконечно удаленная точка гармонически разделяют концы отрезка.*

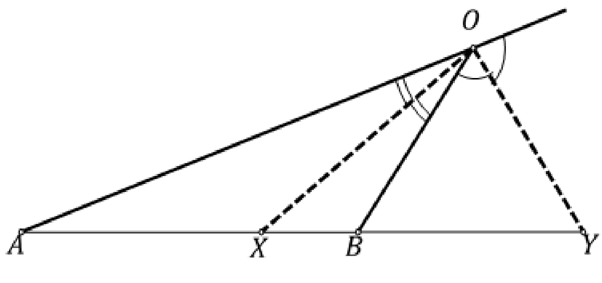


Построив теперь на основании AB равнобедренный треугольник с вершиной O, соединим эту вершину с точками A, B, X, Y_∞ и, поскольку $(abxy) = (ABXY_\infty)$, получим важный пример гармонической четверки прямых $(abxy) = -1$.

Лемма. *Прямые, содержащие биссектрисы двух смежных углов, гармонически разделяют прямые, содержащие стороны углов.*

Если теперь пересечь эту гармоническую четверку прямых произвольной секущей, получим еще одну известную конфигурацию из классической геометрии, снова приводящую к гармонической четверке точек.

Лемма. *Основания внутренней и внешней биссектрис треугольника гармонически разделяют две его вершины.*



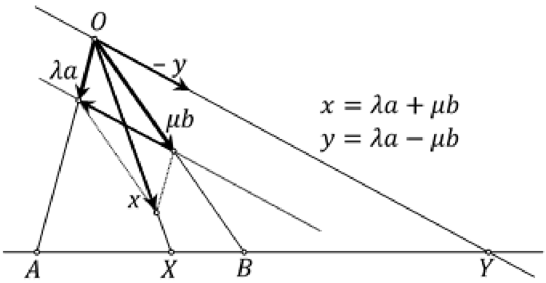
$(ABXY) = -1$

Рассмотрев важные, но все же частные случаи, решим, наконец общую задачу о построении гармонической четверки.

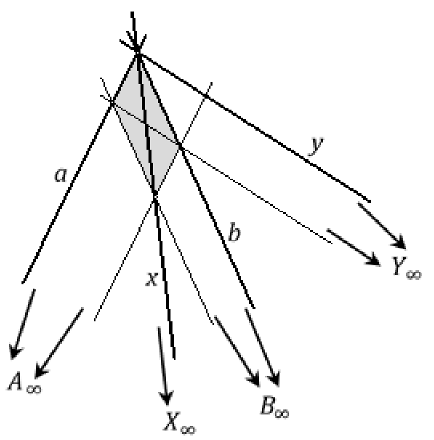
Задача. Точки A, B, X лежат на одной прямой. Построить на этой прямой точку Y, так чтобы пары точек AB и XY гармонически разделяли друг друга, $(ABXY) = -1$.

Возьмем опять же точки $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ произвольно, тогда точка $\widehat{x}$ задается вектором $x = \lambda a + \mu b$, причем $\lambda \neq 0$, поскольку $\widehat{x} \neq \widehat{b}$. Для выполнения равенства $(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}) = -1$ нужно взять вектор $y = \lambda a - \mu b$. В самом деле, $(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{-\mu}{\lambda} = -1$.

Это дает искомое построение, поскольку векторы $x = \lambda a + \mu b$ и $y = \lambda a - \mu b$ можно построить как две диагонали параллелограмма со сторонами λa и μb.

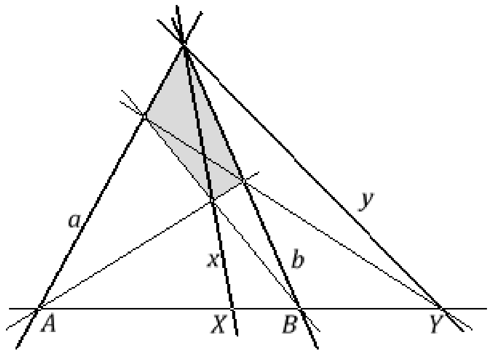


Взяв произвольную точку O, разложим какой-либо вектор x, задающий направление OX, по направлениям OA и OB, получая параллелограмм с диагональю $x = \lambda a + \mu b$. Тогда вторая диагональ этого параллелограмма задает направление вектора $y = \lambda a - \mu b$. Проводя прямую через точку O в направлении вектора y, получаем точку Y на исходной прямой, $(ABXY) = -1$.



Однако, нетрудно заметить, что при этом построении на аффинной карте нам придется проводить параллельные прямые, что не вполне согласуется с духом проективной геометрии. На проективной плоскости любые две прямые пересекаются. Надо улучшить построение, избавляясь от проведения параллельных. Для этого применим обычный прием «ухода в бесконечность». То есть перенесем построенный чертеж на такую аффинную карту, где некоторые элементы станут бесконечно удаленными, а пересекающиеся прямые будут изображаться параллельными. Построим чертеж с тем же самым параллелограммом, на котором прямая AB будет бесконечно удаленной. Поскольку на этом чертеже прямые a, b, x, y по-прежнему образуют гармоническую четверку, они пересекают бесконечно удаленную прямую в парах точек $A_\infty B_\infty$, $X_\infty Y_\infty$, гармонически разделяющих друг друга.

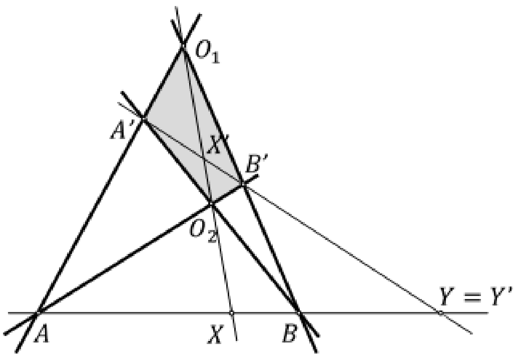
Заметим теперь, что прямые, которые на карте изображаются параллельными, пересекаются в точках, лежащих на бесконечно удаленной прямой. На нашем чертеже таких прямых три пары. Они пересекаются в точках $A_\infty, B_\infty, Y_\infty$.



Возвращая прямую из бесконечности, получаем чертеж, на котором уже нет параллельных прямых, но четверки a, b, x, y и A, B, X, Y по-прежнему гармонические. Осталось лишь заметить, что прямую y можно без всякого ущерба убрать с чертежа, и мы получим классическую конфигурацию, известную как гармонический четырехвершинник. Его легко построить, начав с точек A, B, X, что полностью решает задачу о построении гармонической четверки одной линейкой.

Обычно гармонический четырехвершинник описывают следующим образом: выбираем четыре точки общего положения и проводим все шесть соединяющих их прямых. Эти шесть прямых, они же стороны четырехвершинника, пересекаются в трех точках, отличных от исходных. Если теперь соединить прямой (диагональю) любые две из этих трех новых точек, то точки пересечения этой диагонали со всеми остальными прямыми конфигурации образуют гармоническую четверку. В этом нетрудно убедиться, «не уходя в бесконечность», а используя свойства двойного отношения.

Введем на чертеже обозначения (см.) и рассмотрим центральную проекцию прямой AB на прямую $A'B'$ с центром O_1. При этом в силу свойств сложного отношения $(ABXY) = (A'B'X'Y)$.



С другой стороны, можно рассмотреть проекцию с центром O_2, которая переводит точки A, B, X, Y в точки B', A', X', Y соответственно. Получаем $(A'B'X'Y) = (BAXY)$, следовательно, $(ABXY) =$

$(BAXY)$. По определению сложного отношения

$$(ABXY) = \frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB}, (BAXY) = \frac{BX}{XA} : \frac{BY}{YA},$$

то есть

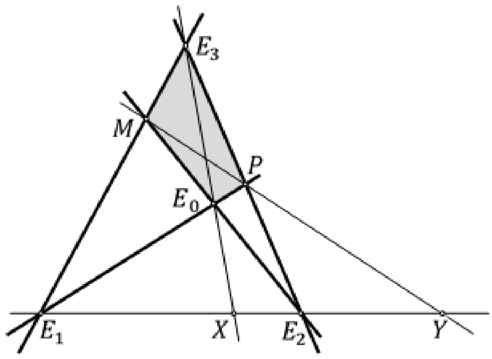
$$(ABXY) = \frac{1}{(BAXY)}.$$

Откуда

$$(ABXY) = \frac{1}{(ABXY)} \Rightarrow (ABXY)^2 = 1.$$

Учитывая, что для четырех различных точек $(ABXY) \neq 1$, получаем $(ABXY) = -1$.

Еще одно простое доказательство этого важного факта можно получить, используя однородные координаты.



Изменим обозначения на чертеже (см.), назовем точки A, B именами E_1, E_2 и рассмотрим репер $E_1E_2E_3E_0$. Выпишем однородные координаты всех точек на чертеже.

$$E_1(1:0:0),\ E_2(0:1:0),\ E_3(0:0:1),\ E_0(1:1:1),$$
$$X(1:1:0),\ M(1:0:1),\ P(0:1:1)$$

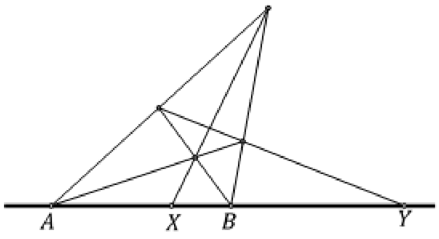
Уравнение прямой $E_1E_2 : x_3 = 0$, уравнение прямой $MP : x_1 + x_2 - x_3 = 0$, точка их пересечения $Y(1 : -1 : 0)$. По определению однородных координат

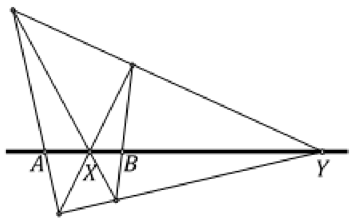
$$X(1:1:0) \Leftrightarrow x = e_1 + e_2$$

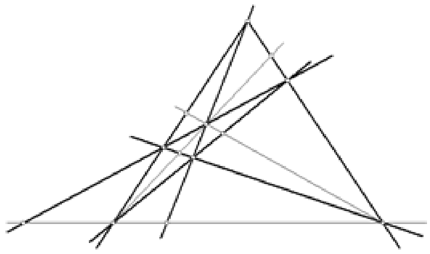
$$Y(1:-1:0) \Leftrightarrow y = e_1 - e_2$$

Отсюда получаем $(E_1E_2XY) = -1$, что и требовалось.

На практике гармоническая четверка обычно возникает в двух случаях.





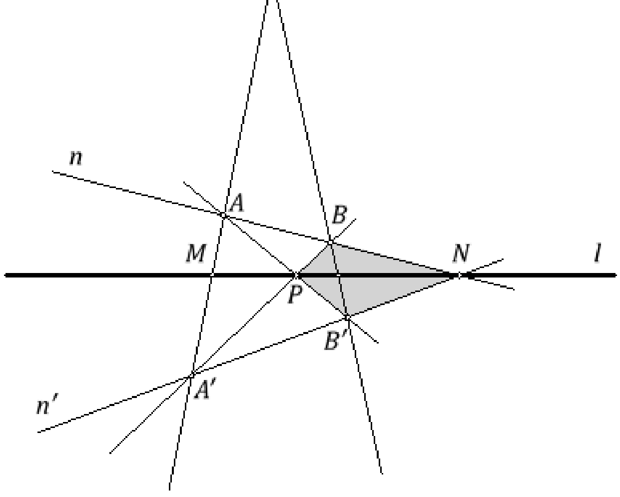


В заключение построим полный чертеж четырехвершинника с шестью сторонами и тремя диагоналями. На каждой из девяти прямых образуется гармоническая четверка точек (!).

14. Гармоническая инволюция

Рассматривая центральную проекцию одной прямой на другую, мы продолжили ее до проективного преобразования всей плоскости. Это отображение имело неподвижную точку — центр и прямую, состоящую из неподвижных точек — ось. Свойства этого отображения удобно исследовать, используя гармонические четверки.

В самом деле, рассмотрим проективное отображение h плоскости на себя, обладающее неподвижным центром O и осью неподвижных точек l. Кроме того, это отображение должно быть инволюцией, то есть для любой точки X должно выполняться $h(X) = X', h(X') = X$, или другими словами $h^2(X) = X$. Покажем, что если это свойство



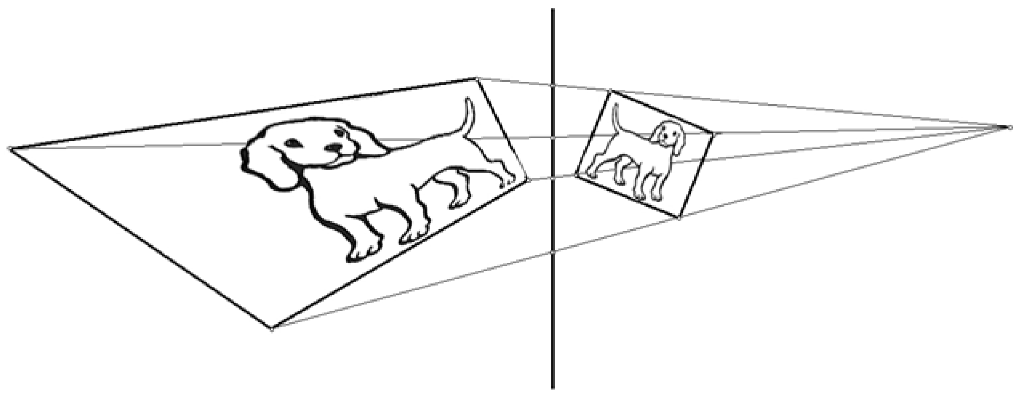
будет выполняться хотя бы для одной точки A при $h(A) \neq A$, то оно будет выполняться для всех точек.

Итак, любая прямая, проходящая через центр O, пересекает ось l в неподвижной точке, то есть имеет уже две неподвижные точки и, следовательно, переходит сама в себя. Это означает, что для любой точки A ее образ, точка A', лежит на прямой OA. Пусть теперь $h(A) = A', h(A') = A$, возьмем любую точку B, проведем прямую AB, обозначим ее n, и пусть ось l она пересекает в неподвижной точке N. Образ прямой n, прямая n', проходит через точки A' и N. Значит, точка B', образ точки B, лежит на прямой OB и прямой n'. Но образом точки A' является точка A, и значит прямая n' переходит обратно в прямую n, а точка B' — в точку B. Это и означает, что преобразование h является инволюцией.

Заметим также, что поскольку прямая AB' переходит в прямую $A'B$, точка их пересечения P будет неподвижной, следовательно лежит на оси l. На чертеже появился гармонический четырехвершинник, а на прямой OA — гармоническая четверка точек. Таким образом, для любой точки A ее образ, точка A', может быть построен следующим образом:

1) проведем прямую OA до пересечения с осью l в точке M;

2) построим на прямой OA точку A' так, чтобы пары OM и AA' гармонически разделяли друг друга (например, с помощью того же четырехвершинника).



То есть, на любой прямой, проходящей через центр O, пара неподвижных точек и любая пара соответственных точек образуют гармоническую четверку. Преобразование h называют гармонической инволюцией. Найдем формулы этого преобразования в подходящем репере.

В качестве вершин репера естественно выбрать неподвижные точки преобразования. Пусть, скажем, точки E_1, E_2 лежат на оси l, точка E_3 совпадает с центром O, а точку E_0 выберем произвольно. Тогда репер $E_1E_2E_3E_0$ под действием преобразования h перейдет в репер $E_1E_2E_3E_0'$. Прямая E_3E_0 имеет уравнение $x_1 - x_2 = 0$, или координаты $E_3E_0(1 : -1 : 0)$, а поскольку точка E_0' лежит на этой прямой и образует с точками $E_3(0 : 0 : 1), E_0(1 : 1 : 1), M(1 : 1 : 0)$ гармоническую четверку, то ее координаты равны $E_0'(1 : 1 : -1)$.

Поскольку точки E_1, E_2, E_3 остаются на месте, порождающие их векторы базиса e_1, e_2, e_3 должны перейти в векторы $\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \lambda_3 e_3$. А поскольку точка $E_0(1 : 1 : 1)$ переходит в точку $E_0'(1 : 1 : -1)$, то в качестве нового базиса подойдут векторы $e_1, e_2, -e_3$.

Таким образом, матрица оператора имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ или

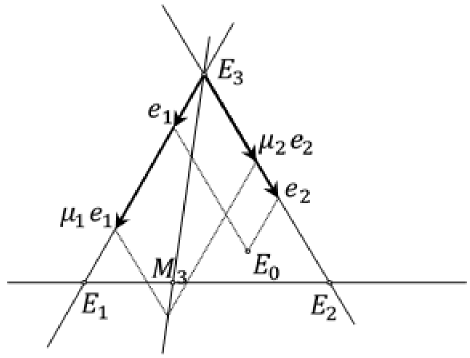
$$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 \\ \rho x_2' = x_2 \\ \rho x_3' = x_3 \end{cases}.$$

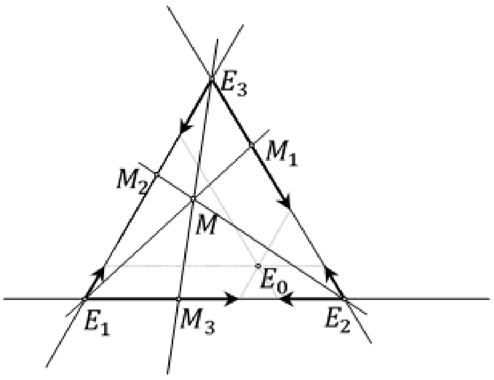
Два частных случая гармонической инволюции играют важную роль в евклидовой геометрии. Чтобы их получить, вспомним, что середина отрезка и бесконечно удаленная точка гармонически разделяют концы отрезка.

Если выбрать карту, на которой ось является бесконечно удаленной прямой, то неподвижный центр O будет делить все отрезки XX' пополам. Такое преобразование называется центральной симметрией с центром O.

Точно так же и осевая симметрия с осью l является гармонической инволюцией с бесконечно удаленным центром O. Интересно, что в проективной геометрии такие разные преобразования как центральная и осевая симметрия оказались частными случаями одного и того же проективного преобразования — гармонической инволюции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1





Построим на аффинной карте с заданным репером $E_1E_2E_3E_0$ точку с однородными координатами $M = (\mu_1 : \mu_2 : \mu_3)$. Построим сначала точку $M_3 = (\mu_1 : \mu_2 : 0)$. Поскольку эта точка порождается вектором $m_3 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$, она лежит на прямой E_1E_2, как и любая точка вида $(x_1 : x_2 : 0)$. Для ее построения можно воспользоваться вершиной E_3 в качестве точки O из предыдущего построения, а базисные векторы e_1, e_2 получить, разложив вектор $\overline{E_3E_0}$ по базису $\overline{E_3E_1}, \overline{E_3E_2}$.

Осталось заметить, что точка $M = (\mu_1 : \mu_2 : \mu_3)$ порождается вектором $m = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 = m_3 + \mu_3 e_3$, следовательно, она лежит на прямой M_3E_3. Теперь можно повторить построение для точки $M_2 = (\mu_1 : 0 : \mu_3)$, лежащей на прямой E_1E_3, и точно таким же образом заметить, что точка M должна лежать на прямой M_2E_2. Точка M построена как точка пересечения прямых M_3E_3 и M_2E_2. Поскольку однородные координаты однозначно определяют точку, прямая M_1E_1, где $M_1 = (0 : \mu_2 : \mu_3)$, также проходит через точку M Любители элементарной геометрии могут проверить это с помощью теоремы Чевы.

Следует отметить два важных частных случая. Во-первых, можно выбрать точку E_0, совпадающей с точкой пересечения медиан треугольника $E_1E_2E_3$, получая барицентрические координаты. В них однородные координаты точки $M = (\mu_1 : \mu_2 : \mu_3)$ можно интерпретировать как «массы», помещенные в точки E_1, E_2, E_3 так, чтобы центр масс полученной системы оказался в точке M.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Несмотря на то, что мы определили сложное отношение на языке линейной алгебры, само это понятие было введено еще Паппом. Он, конечно же, рассматривал его как отношение четырех отрезков без знаков. Мы будем понимать отношение $\frac{AB}{BC} = \lambda$ как $\overline{AB} = \lambda\overline{BC}$, поэтому такое отношение может быть как положительным, так и отрицательным. Все дальнейшие рассмотрения будем вести на конкретной аффинной карте.

Геометрический смысл определителя $\det(a, b)$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах a, b с точностью до знака, зависящего от направления обхода. Поэтому, чтобы определить двойное отношение в терминах обычной (синтетической) геометрии поступим следующим образом: рассмотрим четыре точки A, B, C, D, лежащие на одной прямой l и четыре проходящие через них прямые a, b, c, d, принадлежащие одному пучку с центром O. Выберем на прямой положительное направление и будем считать, что отрезки AB и BA имеют разные знаки. Запишем теперь двойное отношение из площадей четырех треугольников со знаками.

$$\frac{S(OAC)}{S(OCB)} : \frac{S(OAD)}{S(ODB)}$$

нак площади выбирается в соответствии с направлением отрезка в основании, так что площади $S(OAB)$ и $S(OBA)$ имеют разные знаки. Легко видеть, что это в точности отношение четырех определителей. Теперь можно выразить отношение площадей треугольников как отношение оснований, поскольку высота у них одна и та же

$$\frac{S(OAC)}{S(OCB)} : \frac{S(OAD)}{S(ODB)} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

тогда это отношение называется сложным отношением четырех точек $(ABCD)$.

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

С другой стороны можно выразить площади треугольников по формуле $S(OAB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle ab$, считая углы направленными, а $\sin \angle ab$ и $\sin \angle ba$, имеющими разные знаки. Тогда величины OA, OB, OC, OD сократятся и отношение площадей можно выразить как отношение синусов

$$\frac{S(OAC)}{S(OCB)} : \frac{S(OAD)}{S(ODB)} = \frac{\sin \angle ac}{\sin \angle cb} : \frac{\sin \angle ad}{\sin \angle db},$$

тогда это отношение называется сложным отношением четырех прямых $(abcd)$.

$$(abcd) = \frac{\sin \angle ac}{\sin \angle cb} : \frac{\sin \angle ad}{\sin \angle db}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Можно, конечно же, доказать теорему Дезарга с помощью координатного метода, непосредственно вычислив однородные координаты соответствующих точек. Для этого понадобятся лишь взаимно двойственные формулы, позволяющие вычислить однородные координаты прямой по координатам двух ее точек и координаты точки пересечения по известным координатам двух прямых (см. главу «Уравнение прямой»). Соответствующие подробные вычисления в тексте будем пропускать для экономии места.

Обозначим один трехвершинник $E_1E_2E_3$, центр перспективы — E_0 и рассмотрим репер $E_1E_2E_3E_0$. Второй трехвершинник обозначим ABC, его вершины лежат соответственно на прямых E_1E_0, E_2E_0, E_3E_0. Учитывая, что координаты вершин репера

$$E_1(1:0:0),\ E_2(0:1:0),\ E_3(0:0:1),\ E_0(1:1:1),$$

можно записать уравнения прямых (проверьте!)

$$E_1E_0: x_2 - x_3 = 0,\ E_2E_0: x_1 - x_3 = 0,\ E_3E_0: x_1 - x_2 = 0,$$

или в однородных координатах

$$E_1E_0(0:1:-1),\ E_2E_0(1:0:-1),\ E_3E_0(1:-1:0).$$

Точки A, B, C, лежащие на этих прямых, получают координаты

$$A(a:1:1),\ B(1:b:1),\ C(1:1:c),$$

теперь можно записать уравнения соединяющих их прямых, точнее координаты прямых

$$AB(1-b:1-a:ab-1),\ BC(bc-1:1-c:1-b),\ CA(1-c:ac-1:1-a).$$

И наконец, вычислим координаты пересечения этих прямых со сторонами трехвершинника $E_1E_2E_3$.

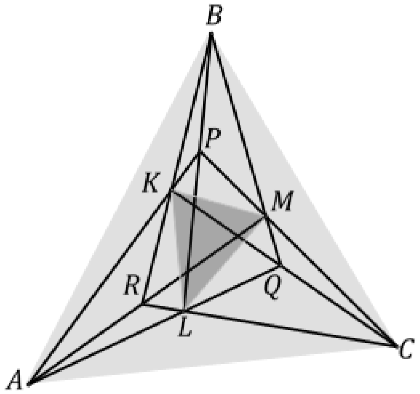
$$E_1E_2(0:0:1),\ E_2E_3(1:0:0),\ E_3E_1(0:1:0).$$

AB и E_1E_2 пересекаются в точке $P(1-a:b-1:0)$,
BC и E_2E_3 пересекаются в точке $Q(0:1-b:c-1)$,
CA и E_3E_1 пересекаются в точке $R(a-1:0:1-c)$.

Как легко видеть, точкам P, Q, R соответствуют векторы p, q, r такие, что

$$p+q+r=0,$$

то есть эти векторы линейно зависимы, следовательно, точки P, Q, R лежат на одной прямой.



Точно так же прямым вычислением в координатах можно проверить и справедливость теоремы Паппа. Для того, чтобы сделать вычисления как можно короче, переформулируем теорему следующим образом:

Теорема. *(Паппа). Рассмотрим две тройки неколлинеарных точек A, B, C и K, L, M. Проведем все прямые, соединяющие точки из разных троек, всего 9 прямых. Разобьем эти 9 прямых на 3 тройки: (AK, BL, CM), (AL, BM, CK), (AM, BK, CL). Если в двух из этих троек прямые пересекаются в одной точке, то и в третьей тройке все три прямые пересекаются в одной точке.*

Теперь введем новые обозначения. Точки K, L, M назовем E_1, E_2, E_3, а точку пересечения прямых AK, BL, CM (теперь AE_1, BE_2, CE_3) назовем E_0 и рассмотрим репер $E_1E_2E_3E_0$. Так же как и в доказательстве теоремы Дезарга, точки A, B, C лежат на прямых

$$E_1E_0(0:1:-1),\ E_2E_0(1:0:-1),\ E_3E_0(1:-1:0),$$

и имеют однородные координаты

$$A(a:1:1),\ B(1:b:1),\ C(1:1:c).$$

Найдем координаты прямых AE_2, BE_3, CE_1 по известным формулам

$$AE_2(-1:0:a),\ BE_3(b:-1:0),\ CE_1(0:c:-1).$$

Принадлежность этих прямых одному пучку определяется условием

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ b & -1 & 0 \\ c & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

что после раскрытия превращается в $abc = 1$.

Точно так же прямые AE_3, BE_1, CE_2 имеют координаты

$$AE_3(-1:a:0),\ BE_1(0:-1:b),\ CE_2(c:0:-1).$$

Их принадлежность одному пучку определяется условием

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & -1 & b \\ c & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

что тоже приводит к $abc = 1$.

Таким образом, прямые AE_3, BE_1, CE_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда в одной точке пересекаются прямые AE_2, BE_3, CE_1, что и доказывает теорему Паппа.