Из истории математики

Запрет Аристотеля

К. В. Козеренко

В заметке изложена история запрета на использование в математике понятия актуальной бесконечности, введенного Аристотелем и преодоленного лишь в XIX веке в связи с развитием современной теории множеств.

В VI веке до н.э. в школе Пифагора в Древней Греции была доказана теорема, в которой утверждалось, что для произвольного натурального n на диагонали квадрата со стороной единица нельзя отложить целое число отрезков, длина которых равнялась бы $1/n$. Удивительная теорема! И самое удивительное не то, что грекам удалось её доказать, а то, что они её сформулировали. Ведь тогда греки знали только натуральные числа и дроби и при этом утверждали, что всё есть число. А тут, оказывается, что диагональ квадрата не есть число, то есть её нельзя измерить. Стоит ещё отметить, что никаким экспериментом утверждение теоремы не может быть проверено. Это чисто математическая теорема!

Теперь позволю себе пофантазировать, благо, "за руку поймать" меня никто не сможет, поскольку текстов тех времен почти не осталось. Предположим, что кто-то, пытаясь спасти положение, предложил считать длиной диагонали *бесконечную последовательность чисел* $1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \ldots$, что означает, что на диагонали сторона квадрата укладывается один раз, потом одна десятая стороны — четыре раза и так далее. Заметим, что это предложение есть точь-в-точь современное определение длины диагонали. Вроде бы, ничего страшного и вполне естественно. Естественно потому, что это определение просто формализует процесс измерения длины со все большей точностью.

Теперь вопрос! Почему определение длины как бесконечной последовательности появилось спустя почти две с половиной тысячи лет? В чем тут дело? Ответ поразительный и является яркой иллюстрацией тезиса Гёте: "Математика есть история математики".

Спустя почти сто лет греческий философ Зенон предложил ряд софизмов[1], из которых вытекало, что пользоваться бесконечностью нельзя, так как бесконечность приводит к абсурдным (по его мнению) выводам. Я напомню только один из самых знаменитых софизмов Зенона про Ахиллеса и черепаху. Итак, пусть на некотором расстоянии от Ахиллеса находится черепаха, которую Ахиллес должен догнать. Через некоторое время, догоняя черепаху, Ахиллес окажется в той точке, в которой сначала была черепаха. За это же время черепаха немного отползет. Опять, чтобы догнать черепаху, Ахиллес через некоторое время (уже, конечно, меньшее, чем на первом шаге) должен оказаться в этой новой точке. И так далее. Процесс будет продолжаться бесконечно. А поскольку *бесконечное число интервалов*, по мнению Зенона, *нельзя преодолеть за конечное время*, стало быть, Ахиллес никогда не догонит черепаху. Согласитесь, казалось бы вполне разумное рассуждение[2], которое ещё согласуется и со "здравым смыслом".

Прошло ещё сто лет (это уже IV век до н.э.) и на исторической сцене появляется Аристотель. Именно благодаря ему мы знаем о работах Зенона, точку зрения которого Аристотель разделяет, но с некоторыми уточнениями. Он выделяет два вида бесконечности: *актуальную* и *потенциальную*. Примером актуальной бесконечности является наша последовательность $1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;$ и так далее. Использовать такую бесконечность нельзя, поскольку это приводит к абсурду. Однако сказать, например, что для каждого натурального числа существует другое натуральное число, которое больше чем первое, можно. Это потенциальная бесконечность и она к противоречию не приводит. Сейчас эти уточнения представляют исключительно исторический интерес, но, согласитесь,

[1] Софизм — это ложь, похожая на правду. Не надо путать софизм с *парадоксом*. Парадокс — это правда, похожая на ложь.

[2] Мне кажется, что этот софизм надо обязательно вспоминать перед определением предела. Только тогда будет возможно оценить его глубину.

полезно знать то, какой путь прошло человечество в течение очень длительного времени до того, как бесконечность стала научным термином.

Итак, опираясь на софизмы Зенона, Аристотель вводит запрет на использование актуальной бесконечности.

Этот запрет в лапидарной форме появляется в “Началах” Евклида (III век до н.э.): **часть меньше целого**! Поразительно! Кажется, что древнегреческие мыслители знали о парадоксах Кантора (о которых речь впереди), согласно одному из которых четных чисел столько же, сколько всех натуральных чисел. Бред какой-то! Как можно с этим согласиться?!

В “Началах” содержится и разрешение использовать потенциальную бесконечность: каждый отрезок можно непрерывно продолжать, но при этом прямую как реально существующий объект рассматривать нельзя. Кстати говоря, после этого становится понятной странная формулировка в “Началах” пятого постулата: “если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых”.

Заметим, что и Архимед, оценивая длину окружности, не нарушал запрет Аристотеля.

Теперь перенесемся сразу почти на две тысячи лет. В “Беседах” Галилея (год 1638) мы находим такой диалог:

Сальвиати: “Множество квадратов натуральных чисел является частью всего множества натуральных чисел. Однако (!), между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сопоставив каждому натуральному числу его квадрат. Таким образом, часть может быть равна целому!”

Сагредо (он отражает взгляды самого Галилея): “Свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где дело идет о бесконечности”.

Итак, запрет Аристотеля пока действует.

Однако, почти в это же время Валлис даёт точное определение предела (1655), Ньютон, создавая дифференциальное и интегральное исчисление, разрабатывает, в частности, теорию бесконечных рядов (1666), Меркатор (Николаус Кауфман) разлагает в ряд натуральный логарифм (1668), а Грегори — тригонометрические функции (1671). Лейбниц, сводя частные и разрозненные приёмы в единую систему взаимно связанных понятий анализа, мыслил, например, бесконечно малые как актуальные объекты. Таким образом, впрочем, пока неявно, но уже во второй половине XVII века происходит фактический отказ от запрета Аристотеля.

Эта тенденция была продолжена в XVIII и XIX веках. Здесь, прежде всего, стоит упомянуть чешского математика Бернарда Больцано, который в работе “Парадоксы бесконечного” (1851), введя понятия множества и взаимно-однозначного соответствия, сформулировал идеи, близкие к будущей наивной теории множеств Георга Кантора. Наконец, в 1873 году наступает эра Кантора. Парадоксы Кантора сейчас общеизвестны. Напомним лишь теорему, в которой утверждается, что в квадрате, включая его внутренние точки и точки границы, столько же точек, сколько на одной его стороне, которая является только частью его границы. Каково! В голове не укладывается! Сам Кантор говорил по этому поводу: “Я вижу это, но не могу поверить”! Стоит ли после этого удивляться тому, что бесконечные множества находились под запретом в течение двух с лишним тысяч лет. Запрет Аристотеля отменён! Однако, какова цена!

Да, **парадоксы Кантора — это цена**, которую мы платим за, казалось бы, невинные фразы типа “рассмотрим множество натуральных чисел”. Воистину, “математика есть история математики”!

Козеренко Константин Владимирович,
Лицей “Вторая школа”, г. Москва,
заведующий кафедрой математики,
преподаватель математики,
кандидат физ.-мат. наук.
E-mail: ckozerenko@mail.ru