ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ – 1

И. Д. Жижилкин

1. Основные свойства

Линейная функция задается уравнением $y = kx + l$, а ее графиком, как известно, является прямая. Это несложно проверить экспериментально, нанеся побольше точек на координатной плоскости. Понятно, что такой эксперимент не заменяет строгое доказательство. Однако в учебнике алгебры за 7-й класс этот факт не доказывается. Дело в том, что здесь необходимо подобие треугольников, которое появляется в курсе геометрии только на следующий год. Попробуем, тем не менее, разобраться.

Возьмем линейную функцию $y = kx+l$, и подставим в ее уравнение два различных значения x_1 и x_2 (часто говорят «точки x_1 и x_2», имея в виду точки оси Ox). Получаем:

$$y_1 = kx_1 + l, \quad y_2 = kx_2 + l,$$

$$y_2 - y_1 = (kx_2 + l) - (kx_1 + l) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1),$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k.$$

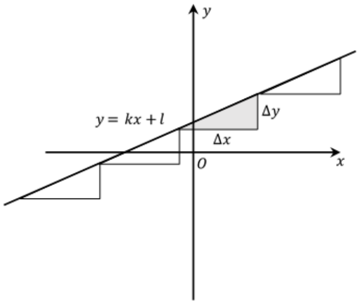
Будем пользоваться обозначениями $\Delta x := x_2 - x_1$, $\Delta y := y_2 - y_1$ (*дельта икс* и *дельта игрек*). Тогда

$$\Delta y = k \cdot \Delta x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$

У полученного отношения есть наглядный физический смысл. Пусть линейное уравнение описывает движение физического тела (материальной точки), переменная x означает время, а переменная y — путь. Тогда $x_2 - x_1 = \Delta x$ — интервал времени, а $y_2 - y_1 = \Delta y$ — пройденный за это время путь. Уравнение $\Delta y = k \cdot \Delta x$ означает, что если вы будете брать равные интервалы времени, то им будут соответствовать одинаковые пройденные пути. Скажем, если вы измеряете время минутами, то за каждую минуту тело проходит один и тот же путь. Если вы теперь разобьете минуты на секунды, то путь за каждую секунду будет в 60 раз меньше пути за минуту. В самом деле, если уменьшить Δx в 60 раз, то из уравнения $\Delta y = k \cdot \Delta x$ следует, что и путь Δy уменьшится во столько же раз. Физики называют такое движение *равномерным*. Отношение $\Delta y = k \cdot \Delta x$ — это отношение пройденного пути к затраченному времени, то есть скорость. Поскольку $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, коэффициент k в уравнении прямой имеет смысл скорости.

$\boxed{\text{Линейная функция } y = kx + l \text{ описывает равномерное движение со скоростью } k.}$

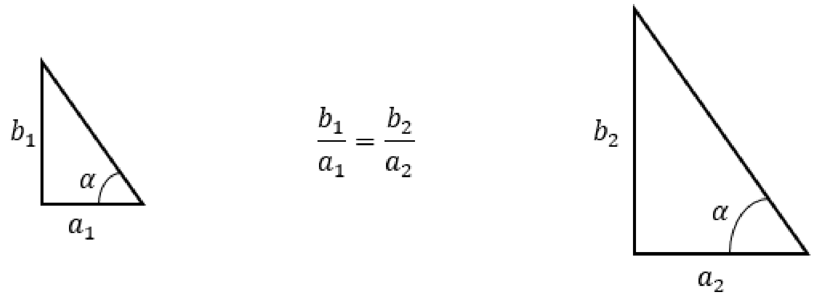
Нарисуем теперь соответствующий чертеж на координатной плоскости.



Ось Ox разбита на равные отрезки Δx, и каждому из них соответствует один и тот же отрезок Δy. Чертеж похож на лестницу из равных треугольников с катетами Δx и Δy. Их гипотенузы выстроились вдоль прямой. Если изменить горизонтальные промежутки Δx, то во столько же раз изменятся и вертикальные отрезки Δy, а углы треугольников останутся прежними. Поэтому их гипотенузы вновь выстроятся вдоль той же самой прямой. Это и означает, что график линейной функции — прямая.

Здесь мы воспользовались важным свойством треугольников. Его доказательство придется пока отложить до 8-го класса.

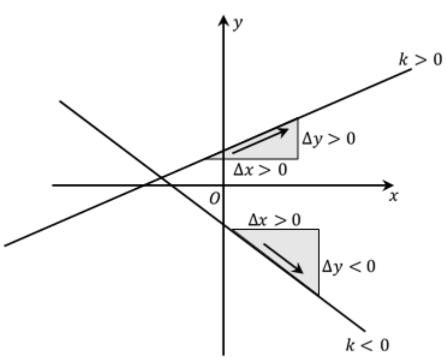
У двух прямоугольных треугольников
острые углы равны $\Leftrightarrow$ отношения катетов равны.



Другими словами, если взять прямоугольный треугольник, и растянуть его катеты в два раза, или в три, или в любое количество раз, его углы не изменятся. С точки зрения житейской наглядности это утверждение кажется вполне правдоподобным, но строгое доказательство, увы, не слишком просто, и сейчас мы его не обсуждаем. Кстати, это отношение катетов называют тангенсом угла и записывают $\frac{b_1}{a_1} = \operatorname{tg}\alpha$. На нашем чертеже катеты Џ это Δx и Δy, а их отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ определяет угол наклона прямой к оси Ox, точнее тангенс этого угла $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Коэффициент k определяет угол наклона прямой к оси Ox, поэтому его называют *угловым коэффициентом* прямой.

Из уравнения $\Delta y = k \cdot \Delta x$ следует, что при $k > 0$ величины Δx и Δy имеют один знак, из положительности Δx следует положительность Δy. При $k < 0$, наоборот, положительному Δx соответствует отрицательное Δy. Для оси Ox положительное направление — вправо, отрицательное — влево, для оси Oy положительное / отрицательное — это направления вверх / вниз. Нарисуем графики линейных функций с разными знаками коэффициента k.



$k > 0$
При увеличении значения x увеличивается значение y.
Функция возрастает $\Delta x > 0 \to \Delta y > 0$.
На чертеже — «движение вверх».

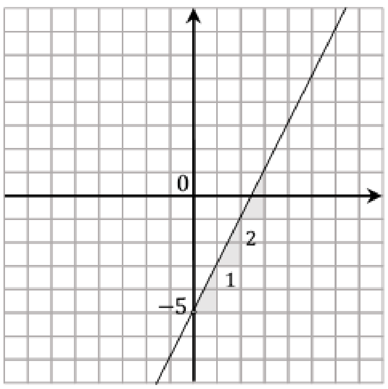
$k < 0$
При увеличении значения x уменьшается значение y.
Функция убывает $\Delta x > 0 \to \Delta y < 0$.
На чертеже — «движение вниз».

2. Построение графика

Теперь применим теорию для построения графика линейной функции $y = kx + l$. Вообще говоря, можно, конечно, взять две любые точки x_1, x_2 и подставить в уравнение $y = kx+l$, получая два значения y_1, y_2, потом отметить на координатной плоскости две точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ и провести через них прямую. В самом деле, для построения прямой достаточно иметь всего две точки. Однако на практике оказывается слишком велика цена случайной ошибки в вычислениях. Неправильно посчитанные координаты точки могут привести к полностью неверному чертежу. Будем действовать по-другому.

(1) Найдем любую точку прямой. Можно подставить в уравнение любое значение x_0. Обычно выбирают $x_0 = 0$. Тогда $y_0 = y(0) = k \cdot 0 + l = l$, и мы получили точку $(0; l)$.

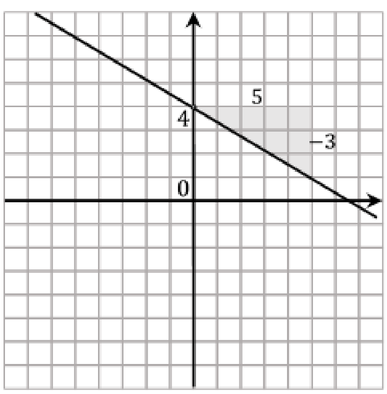
(2) Определим направление прямой. Для этого построим «ступеньку», отступая от точки на Δx по горизонтали и на Δy по вертикали. Размеры Δx и Δy выбираем так, чтобы $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$. Если эскиз строится от руки, то полезно нарисовать несколько ступенек. Теперь можно провести прямую в направлении гипотенузы этой «ступеньки».



Построим прямую $y = 2x - 5$.

Возьмем $x = 0$, тогда $y(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$. Получаем точку $(0; -5)$, лежащую на прямой.

Поскольку $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$, можно взять, например, $\Delta x = 1, \Delta y = 2$ и от точки $(0; -5)$ построить ступеньку, или несколько ступенек, отступая на 1 по горизонтали и на 2 по вертикали.



Построим прямую $y = -\frac{3}{5}x + 4$.

Возьмем $x = 0$, тогда $y(0) = -\frac{3}{5} \cdot 0 + 4 = 4$. Получаем точку $(0; 4)$, лежащую на прямой.

Поскольку $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{5}$, можно взять, например, $\Delta x = 5, \Delta y = -3$ и от точки $(0; 4)$ построить ступеньку, или несколько ступенек, отступая на 5 по горизонтали и на -3 по вертикали.

Упражнения.
Постройте графики функций:

1. $y = 3$
2. $y = 4x$
3. $y = -2x - 1$
4. $y = x + 6$
5. $y = -3x + 7$
6. $y = \frac{1}{2}x - 4$
7. $y = -\frac{3}{4}x + 2$
8. $y = \frac{4}{3}x - 2$
9. $y = -1{,}5x - 6$
10. $y = 0{,}25x + 1$
11. $y = -0{,}4x + 3$
12. $y = 2{,}2x - 3{,}4$

3. Пересечение прямых и параллельность

Найти точку пересечения прямых $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ означает найти такие значения x, y, которые удовлетворяют обоим уравнениям. Для этого надо решить линейное уравнение

$$k_1x + l_1 = k_2x + l_2$$

и найденное значение x подставить в любое из уравнений, чтобы найти y. На практике полезно для самоконтроля подставить этот x в оба уравнения, чтобы убедиться, что получается одно и то же значение y.

Пример. Найдем точку пересечения прямых $y = 2x - 3$ и $y = 1{,}5x - 5$. Для этого решим уравнение

$$2x - 3 = 1{,}5x - 5$$

$$0{,}5x = -2$$

$$x = -4$$

Найденное значение $x = -4$ подставим в первое уравнение, найдем $y = 2 \cdot (-4) - 3 = -11$. Для проверки можно подставить $x = -4$ и во второе уравнение $y = 1{,}5 \cdot (-4) - 5 = -11$. Таким образом, мы убедились, что прямые пересекаются в точке $(-4; -11)$.

Упражнения.

Найдите точки пересечения прямых.

13. $y = 2x - 3$ и $y = -4x + 9$
14. $y = 3x - 18$ и $y = -2x + 7$
15. $y = 2x + 14$ и $y = 2{,}5x + 174$
16. $y = -2x - 6$ и $y = 6x - 2$
17. $y = 3x + 6$ и $y = x + \frac{14}{3}$
18. $y = 4{,}5x - 3{,}8$ и $y = -3{,}6x - 2{,}9$

Ответы:

13. $(2; 1)$
14. $(5; -3)$
15. $(-6; 2)$
16. $(-0{,}5; -5)$
17. $(-\frac{2}{3}; 4)$
18. $\left(\frac{1}{9}; -\frac{33}{10}\right)$

Проверьте, что три прямые пересекаются в одной точке и найдите координаты этой точки.

Ответы:

19. $y = x - 5$, $y = 0{,}5x - 3$, $y = -2x + 7$
20. $y = 3x + 4{,}5$, $y = -5x + 0{,}5$, $y = -x + 2{,}5$
21. $y = 2x - 1$, $y = -\frac{1}{3}x - 8$, $y = 2{,}5x + 0{,}5$
22. $y = 0{,}9x - 11$, $y = \frac{2}{3}x - 4$, $y = 0{,}25x + 8{,}5$

19. $(4; -1)$
20. $(-0{,}5; 3)$
21. $(-3; -7)$
22. $(30; 16)$

Если мы теперь попробуем найти таким же образом точку пересечения прямых

$$y = 3x - 5 \text{ и } y = 3x + 2,$$

получим уравнение $3x - 5 = 3x + 2$, не имеющее корней, поскольку $3x$ с обеих сторон взаимно уничтожаются и остается неверное равенство $-5 = 2$. Значит, эти прямые не пересекаются.

К такому же результату, очевидно, приведет попытка найти точку пересечения прямых

$$y = kx + l_1 \text{ и } y = kx + l_2$$

с совпадающими угловыми коэффициентами. Уравнение не имеет корней, следовательно, прямые не пересекаются. Как известно из геометрии, прямые не имеющие точки пересечения, называются параллельными.

Прямые $y = kx + l_1$ и $y = kx + l_2$ параллельны.
параллельность прямых $\Leftrightarrow$ равенство угловых коэффициентов

В самом деле, равенство угловых коэффициентов означает, что прямые образуют с осью Ox равные углы. А из равенства соответственных углов, как известно из геометрии, следует параллельность.

Также мы знаем, что через точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. Напишем ее уравнение. Поскольку параллельность прямых определяется угловым коэффициентом, сформулируем задачу так.

Задача. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, с угловым коэффициентом k.

Используем соотношение $\Delta y = k \cdot \Delta x$. Выберем на прямой две точки. Одна данная в условии точка $(x_0; y_0)$ стоит на месте, а другая Ц произвольная точка с координатами $(x; y)$ может свободно перемещаться по прямой. Тогда $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$ и искомое уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, с угловым коэффициентом k:
$y - y_0 = k(x - x_0)$.

Пример. Напишем уравнение прямой, проходящей через точку $(4; -1)$ параллельно прямой $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Параллельность прямых означает равенство угловых коэффициентов, значит, $k = -\frac{1}{2}$.
Точка $(x_0; y_0)$ имеет координаты $(4; -1)$. Подставим эти значения в уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 4).$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Получаем искомое уравнение:

$$y = -\frac{1}{2}x + 1.$$

Упражнения.
Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

23. $(-5; 0), y = 2x - 9$
24. $(3; 1), y = -x + 3$
25. $(6; -8), y = \frac{2}{3}x + 7$
26. $(-8; -1), y = -0{,}75x - 1$
27. $(-3; 7), y = 1{,}5x + 1,$
28. $(-100; -1), y = -3{,}2x - 10$

Ответы:

23. $y = 2x + 10$
24. $y = -x + 4$
25. $y = \frac{2}{3}x - 12$
26. $y = -0{,}75x - 7$
27. $y = 1{,}5x + 11{,}5$
28. $y = -3{,}2x - 321$

4. Уравнение прямой по двум точкам

Через две точки проходит единственная прямая. Это первая аксиома школьного курса геометрии. Естественно поставить задачу: написать уравнение прямой, проходящей через две данные точки с известными координатами $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$. Это несложно сделать, поскольку из соотношения $\Delta y = k \cdot \Delta x$ можно выразить угловой коэффициент $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, при этом $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Теперь можно записать уравнение прямой в виде $y - y_0 = k(x - x_0)$, поскольку мы знаем и точку (можно взять любую из двух), и угловой коэффициент.

Пример. Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $(4; 1)$ и $(-2; -8)$.
1) Найдем угловой коэффициент $k = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(-8-1)}{(-2-8)} = \frac{(-9)}{(-6)} = 1{,}5$.
2) Напишем уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = 1{,}5$, проходящей через точку $(4; 1)$.

$$y - 1 = 1{,}5(x - 4)$$

$$y = 1{,}5x - 5.$$

Можете убедиться самостоятельно, что взяв вторую точку $(-2; -8)$ и угловой коэффициент $k = 1{,}5$, мы снова получим то же самое уравнение $y = 1{,}5x - 5$.

Упражнения.
Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

29. $(3;0),(5;4)$,
30. $(-3;7),(6;-2)$,
31. $(-6;-1),(0;2)$,
32. $(6;1),(-9;-9)$,
33. $(-5;14),(10;-4)$,
34. $(4;-3),(-3;1)$.

Ответы:

29. $y=2x-6$
30. $y=-x+4$
31. $y=0{,}5x+2$
32. $y=\frac{2}{3}x-3$
33. $y=-1{,}2x+8$
34. $y=-\frac{4}{7}x-\frac{5}{7}$

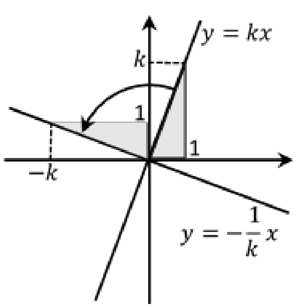
Проверьте, что три данные точки лежат на одной прямой и запишите ее уравнение

35. $(1;4),(-2;13),(2;1)$
36. $(2;-3),(10;1),(-4;-6)$
37. $(3;-3),(-1;-\frac{1}{3}),(-2;\frac{1}{3})$
38. $(1;2),(-4;-5),(11;16)$

Ответы:

35. $y=-3x+7$
36. $y=0{,}5x-4$
37. $y=-\frac{2}{3}x-1$
38. $y=1{,}4x+0{,}6$

5. Перпендикулярность прямых



Разберемся теперь, как связаны между собой коэффициенты перпендикулярных прямых. Возьмем прямую $y=kx$, проходящую через начало координат, и повернем на 90° против часовой стрелки. При этом «треугольная ступенька» со сторонами $\Delta x, \Delta y$ тоже повернется на 90°. Точка $(1:k)$ перейдет в точку $(-k;1)$. Как видим, при этом Δx и Δy поменяются местами, а их отношение еще и поменяет знак. Прямая $y=kx$ превратилась в перпендикулярную прямую $x=-ky$, или в привычной записи $y=-\frac{1}{k}x$. Если теперь добавить в уравнения прямых любые слагаемые l_1,l_2, то новые прямые $y=kx+l_1$ и $y=-\frac{1}{k}x+l_2$ по-прежнему останутся перпендикулярными.

> Прямые $y=kx+l_1$ и $y=-\frac{1}{k}x+l_2$ перпендикулярны.
> Угловые коэффициенты k и $-\frac{1}{k} \Leftrightarrow$ перпендикулярность прямых

Пример. Напишем уравнение прямой, проходящей через точку $(6;-5)$ перпендикулярно прямой $y=-1{,}5x+4$.

У прямой $y=-1{,}5x+4$ угловой коэффициент $k=-1{,}5=-\frac{3}{2}$, значит угловой коэффициент перпендикулярной прямой равен $-\frac{1}{k}=\frac{2}{3}$ (перевернули дробь и поменяли знак). Теперь надо написать уравнение прямой с угловым коэффициентом $\frac{2}{3}$, проходящей через точку $(6;-5)$. Для этого снова используем уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$$y + 5 = \frac{2}{3}(x - 6),\ y = \frac{2}{3}x - 9.$$

Упражнения.
Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

39. $(-5; 0), y = 5x + 1$
40. $(3; -2), y = -0{,}6x - 3$
41. $(-14; 20), y = \frac{7}{8}x + 6$
42. $(36; 15), y = -2{,}4x + 2.$

Ответы:

39. $y = -0{,}2x - 1$
40. $y = \frac{10}{3}x - 12$
41. $y = -\frac{8}{7}x + 4$
42. $y = \frac{5}{12}x$

Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой, и найдите точку пересечения этого перпендикуляра с исходной прямой.

43. $(6; -3), y = -3x + 13$
44. $(3; 7), y = \frac{4}{7}x - 4$
45. $(-4; 10), y = -0{,}4x - 9$
46. $(9; -5{,}5), y = 1{,}8x + 10{,}1$

Ответы:

43. $y = \frac{1}{3}x - 5; (3; -4)$
44. $y = -\frac{7}{4}x + \frac{49}{4}; (7; 0)$
45. $y = 2{,}5x + 20; (-10; -5)$
46. $y = -\frac{5}{9}x - \frac{1}{2}; (-4{,}5; 2)$

Проверьте, что высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке H и найдите ее координаты.

47. $A(1; 4), B(-2; 0), C(4; -2)$
48. $A(4; 8), B(7; -2), C(-1; 2)$
49. $A(-5; -1), B(-2; 3), C(1; 2)$
50. $A(8; 4), B(-1; 7), C(4; 2)$
51. $A(-5; 3), B(3; 1), C(0; -2)$
52. $A(-2; -2), B(-1; 1), C(1; 2).$

Ответы:

47. $H(-2; 1)$
48. $H(2; 3)$
49. $H(-3; 5)$
50. $H(3; -1)$
51. $H(-2; -6)$
52. $H(-5; 4)$